



Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE)

---

**Présentée et soutenue par :**

**Simon FOUCAUD**

**le** vendredi 19 octobre 2012

**Titre :**

Propagation d'ondes dans un guide inhomogène :  
application à la cochlée

---

**École doctorale et discipline ou spécialité :**

ED AA : Génie mécanique et Chimie, biologie, santé

**Unité de recherche :**

Institut Clément Ader

**Directeur(s) de Thèse :**

Pr. Bernard FRAYSSE - Directeur de thèse

Pr. Yves GOURINAT - Co-directeur de thèse

**Jury :**

Pr. Jean-François DEÜ - Rapporteur

Pr. François GAUTIER - Président du jury

Pr. Yves GOURINAT - Co-directeur de thèse

Pr. Karl GROSH - Examineur

Dr. Pascal MARTIN - Examineur

Dr. Guilhem MICHON - Examineur

Pr. Charles PEZERAT - Rapporteur



Institut Clément Ader  
Université de Toulouse  
135, Avenue de Rangueil  
31077 Toulouse, France

Institut Supérieur de l'Aéronautique et  
de l'Espace  
Département Mécanique des Structures  
et Matériaux  
10, Avenue Édouard Belin  
31055 Toulouse, France





# Remerciements

Je voudrais remercier toutes les personnes qui m'ont apporté leur aide et leur soutien au cours de ces trois années.

Merci à Yves Gourinat qui a initié ce projet et m'a fait confiance pour le réaliser. Je tiens à remercier le Professeur Bernard Fraysse et son équipe pour m'avoir ouvert les portes de leur service et pour les discussions très enrichissantes que nous avons eues.

Ma gratitude va à Guilhem Michon qui m'a guidé et m'a donné de précieux conseils tout au long de ma thèse. Les nombreux échanges que nous avons eus m'ont beaucoup appris, professionnellement et personnellement. Son avis a souvent été opportun et son expérience a toujours été bénéfique.

Je remercie toutes les personnes, chercheurs, techniciens, doctorants, stagiaires, travaillant au DMSM à l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace. Mes collègues de bureau, par leur sympathie, ont su créer une ambiance de travail agréable et stimulante, qui a fortement contribué à ma motivation du début jusqu'à la fin de ma thèse.

Je voudrais remercier Adrien Pelat et François Gautier du LAUM qui ont participé activement à la réalisation de la partie expérimentale de ma thèse et qui ont su par leur remarques pertinentes me faire part de leur savoir et de leur grande expérience. Merci à Stanislas Renard, Mathieu Sécaïl-Géraud, Thibault Le Magueresse et Cyprien Plenier qui ont également apporté leur aide et leurs compétences à ces travaux.

I would like to adress a special thank to the Professor Karl Grosh who invited me for a visiting scholar stay at University of Michigan. I learned a lot working with him on cochlear mechanics and this four months stay was a really great experience for me.

J'ai également une grande reconnaissance pour Jean-François Deü et Charles Pezerat qui ont rapporté mes travaux, ainsi que pour Pascal Martin pour ses observations pertinentes lors de ma soutenance.

Merci à ma famille qui m'a encouragé tout au long de mes études et à qui je dois beaucoup. Enfin, merci à Camille qui m'a soutenu pendant ces trois années de thèse.



# **Propagation d'ondes dans un guide inhomogène : application à la cochlée.**

## **Résumé**

Dans la cochlée, la réponse couplée de sa structure et de son fluide interne peut être représentée sous la forme d'une onde dont les caractéristiques varient en fonction de la position longitudinale. La méthode asymptotique Wentzel-Kramers-Brillouin est adaptée à la modélisation de ce type d'onde.

Dans un premier temps, cette méthode est reprise. Un modèle numérique est également développé et les résultats des deux méthodes sont comparés.

Dans un deuxième temps, la méthode Wentzel-Kramers-Brillouin est améliorée afin de prendre en compte le couplage entre plusieurs ondes. Le couplage d'un mode propagatif avec des modes évanescents est réalisé et validé. Dans la cochlée, la stimulation des cellules cillées résulte d'un mouvement de cisaillement de la membrane tectoriale et de flexion de la membrane basilaire. Le couplage entre ces deux modes de déformation est encore peu connu et offre une perspective intéressante.

Dans un troisième temps, une nouvelle méthode couplant la méthode Wentzel-Kramers-Brillouin et une méthode numérique est développée et validée afin de déterminer des modes transverses de propagation. Cette méthode est appliquée à la mécanique cochléaire et un mode de flexion de la membrane basilaire et un mode relatif à un mouvement de cisaillement de la membrane tectoriale sont déterminés.

Enfin, une expérience inspirée des cochlees artificielles est conçue et réalisée. La propagation d'ondes est observée et la tonotopie est mesurée et comparée aux modèles. Afin de limiter la réflexion des ondes et de faciliter la mesure, une combinaison originale du trou noir acoustique avec une lame de largeur variable est utilisée.

## **Mots-clefs**

Cochlée, Guide d'onde inhomogène, Dispersion, Amortissement, Couplage de modes, Trou noir acoustique, Cochlée artificielle, Tonotopie.

# Wave propagation in an inhomogeneous waveguide : application to the mammalian cochlea.

## Abstract

The cochlea is the organ of hearing for humans and mammals. It is often modelled as an inhomogeneous waveguide. A travelling wave propagates along the fluid structure coupled waveguide. The mechanical impedance of the structure is varying and provides a frequency place relation. The asymptotic method Wentzel-Kramers-Brillouin allows to solve for the basilar membrane vibration. The evanescent modes are taken into account to provide a better representation compared to the numerical models.

As a second step, the finite elements method is used to solve for the transversal modes while the WKB Approximation deals with the longitudinal propagation. The first flexural mode of the basilar membrane is shown. The second propagative mode reveals a shearing motion of the tectorial membrane which can help stimulating the hair cells.

An over-size artificial cochlea is designed and built. Thanks to an acoustic black hole, used as an anechoic end, travelling waves are observed on this device. Reflected waves are attenuated and the interferences with incident waves reduced.

Mode coupling could be applied not only to evanescent modes but also to propagative ones. Perspectives for the adaptation of the WKB method to fluid structure inhomogeneous waveguides, and particularly to the immersed acoustic black hole, seem to be very promising.

## Keywords

Cochlea, Inhomogeneous waveguide, Dispersion, Mode coupling, Acoustic Black Hole, Artificial Cochlea, Tonotopy.

# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>15</b>
<b>Liste des principaux symboles</b>	<b>19</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>21</b>
1.1 Anatomie de l'oreille et fonctionnement physiologique . . . . .	22
1.1.1 L'oreille externe . . . . .	22
1.1.2 L'oreille moyenne . . . . .	23
1.1.3 L'oreille interne . . . . .	23
1.2 La cochlée . . . . .	24
1.2.1 Comportement passif . . . . .	25
1.2.2 Comportement actif . . . . .	27
1.2.2.1 Effets observables de l'activité de la cochlée . . . . .	28
1.2.2.2 Fonctionnement physiologique . . . . .	29
1.2.3 Caractérisation de la cochlée humaine . . . . .	30
1.2.3.1 Dimensions . . . . .	30
1.2.3.2 Réponse en fréquence et tonotopie . . . . .	30
1.2.3.3 Réponse dynamique . . . . .	31
1.3 Contexte de l'étude . . . . .	31
1.3.1 Applications . . . . .	33
1.3.1.1 Médecine . . . . .	33
1.3.1.2 Implants cochléaires . . . . .	33
1.3.1.3 Capteurs acoustiques . . . . .	34
1.3.2 Motivations de l'étude . . . . .	34
1.4 Plan du manuscrit . . . . .	36
<b>2 Modèles mécaniques de la cochlée</b>	<b>37</b>
2.1 Description de la physique . . . . .	37
2.1.1 Considérations classiques . . . . .	37
2.1.1.1 Équations générales . . . . .	37
Domaine fluide . . . . .	37
Équation d'onde . . . . .	38
Domaine solide . . . . .	38
Structure équivalente . . . . .	39
Enroulement . . . . .	39
Membrane de Reissner . . . . .	39
Gravité . . . . .	39
2.1.1.2 Conditions aux limites . . . . .	39
Conduction aérienne . . . . .	39

	Oreille moyenne . . . . .	39
	Fenêtre ronde . . . . .	40
	Parois . . . . .	40
2.1.2	Hypothèses propres à cette thèse . . . . .	40
2.1.2.1	Équations générales . . . . .	40
	Activité . . . . .	40
	Fluides périlymphatiques et endolymphatiques . . . . .	40
	Transduction . . . . .	40
	Linéarité . . . . .	41
2.1.2.2	Conditions aux limites . . . . .	41
	Parois internes . . . . .	41
2.1.3	Synthèse . . . . .	41
2.2	Modèle passif par la méthode des éléments finis . . . . .	41
2.2.1	Modèle bidimensionnel . . . . .	42
2.2.1.1	Hypothèses . . . . .	42
	Structure à réaction locale . . . . .	44
	Structure de type membrane . . . . .	44
	Structure de type poutre . . . . .	45
2.2.1.2	Résultats . . . . .	45
2.2.2	Modèle tridimensionnel . . . . .	47
2.2.2.1	Géométrie enroulée de la membrane basilaire . . . . .	47
2.2.2.2	Géométrie déroulée de la membrane basilaire . . . . .	49
	Comparaison avec des résultats expérimentaux . . . . .	49
	Modèle appliqué à la cochlée . . . . .	49
2.2.2.3	Interaction fluide structure . . . . .	51
2.2.3	Bilan de la méthode des éléments finis . . . . .	53
2.3	Approche par un système Hamiltonien-à-ports . . . . .	55
2.3.1	Description du système global . . . . .	55
2.3.1.1	Modèle fluide macroscopique . . . . .	55
2.3.1.2	Modèles structuraux . . . . .	56
2.3.2	Forme du Hamiltonien-à-ports . . . . .	56
2.3.2.1	Modèle fluide . . . . .	57
2.3.2.2	Modèle structural local . . . . .	58
2.3.3	Modèle structural global . . . . .	59
2.3.4	Couplage . . . . .	60
2.3.5	Discussion . . . . .	60
2.4	Vers un modèle asymptotique . . . . .	60
<b>3</b>	<b>Description d'un guide d'onde inhomogène.</b>	<b>63</b>
3.1	Approche ondulatoire . . . . .	63
3.1.1	Modélisation ondulatoire de la vibration . . . . .	63
3.1.1.1	Onde non dispersive sur une corde . . . . .	63
3.1.1.2	Onde dispersive sur une poutre . . . . .	64
3.1.1.3	Conditions limites et réflexion . . . . .	64
3.1.2	Plaque de section constante . . . . .	66
3.1.2.1	Problème transverse . . . . .	67
3.1.2.2	Problème longitudinal . . . . .	68
3.2	Hypothèses supplémentaires . . . . .	68
3.2.1	Interaction fluide structure . . . . .	68

3.2.2	Inhomogénéité . . . . .	69
3.3	Méthode Wentzel-Kramers-Brillouin . . . . .	70
3.3.1	Présentation du problème . . . . .	70
3.3.2	Hypothèses . . . . .	70
3.3.3	Approche variationnelle pour résoudre la phase et l'amplitude . . . .	72
3.3.4	Amortissement . . . . .	74
3.3.5	Résultats . . . . .	75
3.3.5.1	Nombre d'onde . . . . .	76
3.3.5.2	Amplitude . . . . .	76
3.4	Méthode de projection sur les modes de propagation . . . . .	78
3.4.1	Objectif . . . . .	78
3.4.2	Géométrie . . . . .	79
3.4.3	Introduction des variables . . . . .	79
3.4.4	Modèle fluide . . . . .	80
3.4.5	Structure à réaction locale . . . . .	81
3.4.5.1	Équation eikonale et lieu des racines . . . . .	81
3.4.5.2	Amplitude . . . . .	83
3.4.6	Structure de type membrane . . . . .	84
3.4.6.1	Équation eikonale et lieu des racines . . . . .	85
3.4.6.2	Amplitude . . . . .	85
3.4.7	Structure de type poutre . . . . .	86
3.4.7.1	Équation eikonale et lieu des racines . . . . .	87
3.4.7.2	Amplitude . . . . .	87
3.4.8	Réponse globale . . . . .	88
3.4.9	Résultats . . . . .	89
3.5	Bilan de la méthode WKB classique . . . . .	90
3.6	Couplage avec les modes évanescents . . . . .	92
3.6.1	Relation d'orthogonalité . . . . .	93
3.6.2	Projection . . . . .	93
3.6.3	Conditions aux limites . . . . .	94
3.6.4	Résultats . . . . .	95
3.7	Conclusion . . . . .	95
<b>4</b>	<b>Détermination des modes transverses de l'organe de Corti</b>	<b>97</b>
4.1	Modèle discret à deux degrés de liberté . . . . .	98
4.1.1	Géométrie et paramètres . . . . .	98
4.1.2	Résolution par la méthode des éléments finis à deux dimensions . . .	98
4.1.3	Résolution par la méthode WKB . . . . .	100
4.1.4	Discussion . . . . .	102
4.2	Calcul des modes transverses d'un guide d'onde . . . . .	103
4.2.1	Hypothèses générales . . . . .	103
4.2.2	Résolution dans le plan . . . . .	104
4.2.3	Adimensionnalisation . . . . .	105
4.2.4	Expansion asymptotique . . . . .	105
4.2.4.1	Domaine fluide . . . . .	105
4.2.4.2	Domaine solide . . . . .	105
4.2.4.3	Conditions aux limites . . . . .	105
4.2.5	Problème discrétisé . . . . .	106
4.2.5.1	Domaine fluide . . . . .	106

4.2.5.2	Domaine solide . . . . .	106
4.2.5.3	Couplage . . . . .	107
4.2.6	Validation du modèle . . . . .	107
4.2.6.1	Modèle référence (WKB) . . . . .	108
4.2.6.2	Nombres d'onde . . . . .	109
4.2.6.3	Champ de pression et déplacement . . . . .	110
4.2.6.4	Bilan . . . . .	112
4.3	Application à la section de l'organe de Corti . . . . .	112
4.3.1	Géométrie de la section radiale . . . . .	112
4.3.2	Paramètres matériaux . . . . .	113
4.3.3	Hypothèses . . . . .	114
4.3.3.1	Longueurs d'onde et nombres d'onde . . . . .	115
4.3.3.2	Modes propres . . . . .	116
	Champs de pression . . . . .	116
	Déplacement structural . . . . .	118
4.3.4	Couplage mécanique longitudinal . . . . .	119
4.4	Conclusion . . . . .	120
<b>5</b>	<b>Observation d'ondes sur un banc d'essai inspiré des cochlées artificielles</b>	<b>123</b>
5.1	Les cochlées artificielles . . . . .	123
5.2	Principe de l'expérience . . . . .	124
5.3	Conception de la zone tonotopique . . . . .	126
5.3.1	Contraintes de conception . . . . .	126
5.3.2	Paramètres de la zone tonotopique . . . . .	129
5.4	Utilisation d'un trou noir acoustique . . . . .	129
5.4.1	Principe du trou noir acoustique . . . . .	129
5.4.2	Estimation par la méthode WKB . . . . .	131
5.4.3	Dimensionnement . . . . .	134
5.5	Réalisation du banc d'essai . . . . .	136
5.5.1	Excitation . . . . .	137
5.5.2	Acquisition des données . . . . .	139
5.6	Résultats à fréquence donnée . . . . .	140
5.6.1	Courbes tonotopiques . . . . .	143
5.7	Cartes tonotopiques . . . . .	144
5.7.1	Principe . . . . .	144
5.7.2	Cartes dans l'air . . . . .	144
5.7.3	Cartes dans l'eau . . . . .	146
5.8	Effet du trou noir acoustique. . . . .	146
5.9	Conclusion et perspectives . . . . .	146
<b>6</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>149</b>
6.1	Modèles de guide d'onde inhomogène . . . . .	149
6.2	Expérimentations . . . . .	154
6.3	Perspectives . . . . .	154
<b>A</b>	<b>Définition des niveaux de son</b>	<b>157</b>



---

<b>B</b>	<b>Résolution de l'équation eikonale pour une plaque en flexion dans le vide</b>	<b>159</b>
B.1	Cas 1 . . . . .	160
B.2	Cas 2 . . . . .	161
B.3	Cas 3 . . . . .	161
	B.3.1 Sous-cas 1 . . . . .	162
	B.3.2 Sous-cas 2 . . . . .	162
	B.3.3 Sous-cas 3 . . . . .	162
B.4	Bilan . . . . .	163
<b>C</b>	<b>Résultats expérimentaux</b>	<b>165</b>
C.1	Modes bâti . . . . .	165
C.2	Réponses dans l'air . . . . .	165
C.3	Réponses dans l'eau . . . . .	165
	<b>Bibliographie</b>	<b>169</b>



# Table des figures

1.1	Reconstruction numérique de l'oreille . . . . .	22
1.2	Schéma de l'oreille interne . . . . .	23
1.3	Géométrie 3D de la cochlée . . . . .	24
1.4	Propagation d'une onde . . . . .	25
1.5	Tonotopie dans la cochlée . . . . .	26
1.6	Schéma de l'organe de Corti . . . . .	27
1.7	Mesures de gain dans la cochlée active . . . . .	28
1.8	Principe de l'amplification dans l'organe de Corti . . . . .	29
1.9	Courbe tonotopique de l'humain . . . . .	31
1.10	Courbes d'isointensité perçu . . . . .	32
1.11	Implants cochléaires . . . . .	33
2.1	Domaines physiques dans la cochlée . . . . .	38
2.2	« Box model » . . . . .	42
2.3	Modèle 2D par éléments finis . . . . .	43
2.4	Réponse en fréquence MEF 2D, $1000Hz$ , $5000Hz$ et $10000Hz$ . . . . .	44
2.5	Réponse à $5000 Hz$ (structure à réaction locale, membrane et poutre) . . . . .	46
2.6	Comparaison MEF 2D avec les différences finies . . . . .	47
2.7	Schéma de convergence . . . . .	47
2.8	Géométrie enroulée 3d de la membrane basilaire . . . . .	48
2.9	Modes de vibration pour un modèle de type « coque isotrope » . . . . .	48
2.10	Photographies de la plaque de largeur variable . . . . .	49
2.11	Modes de vibrations de la plaque de largeur variable . . . . .	50
2.12	Géométrie du solide 3D représentant la membrane basilaire . . . . .	51
2.13	Modes et réponses harmoniques de la membrane basilaire MEF 3D . . . . .	52
2.14	Réponses harmoniques de la membrane basilaire immergée MEF 3D . . . . .	53
2.15	Influence du fluide sur la réponse de la membrane basilaire MEF 3D . . . . .	54
2.16	Tonotopie obtenue par la méthode MEF 3D . . . . .	54
2.17	« Box model » . . . . .	55
2.18	Modèles structuraux utilisés pour décrire le système Hamiltonien-à-ports. . . . .	56
3.1	Courbe de dispersion pour une poutre en flexion . . . . .	65
3.2	Plaque en flexion infinie . . . . .	66
3.3	Solutions de la relation de dispersion pour une plaque en flexion . . . . .	69
3.4	« Box model » . . . . .	70
3.5	Lieux des racines pour la plaque en flexion immergée par WKB . . . . .	76
3.6	Partie réelle du nombre d'onde par WKB . . . . .	77
3.7	Courbes enveloppes en fonction de la fréquence par WKB . . . . .	77
3.8	Courbes enveloppes en fonction du coefficient de réflexion par WKB . . . . .	78

3.9	Courbes enveloppes des ondes incidentes et réfléchies par WKB . . . . .	78
3.10	Réponse de la membrane basilaire d'un chinchilla . . . . .	79
3.11	Modèle de structure à réaction locale . . . . .	82
3.12	Lieux des racines de la structure à réaction locale par WKB-P . . . . .	83
3.13	Modèle de structure de type membrane . . . . .	85
3.14	Lieux des racines de la structure de type membrane par WKB-P . . . . .	86
3.15	Modèle structural de type poutre. . . . .	87
3.16	Lieux des racines de la structure de type poutre par WKB-P . . . . .	88
3.17	Réponse de la structure à réaction locale pour 1000 Hz, 5000 Hz et 10000 Hz par WKB-P . . . . .	89
3.18	Réponse de la structure de type membrane pour 1000 Hz, 5000 Hz et 10000 Hz par WKB-P . . . . .	90
3.19	Réponse de la structure de type poutre pour 1000 Hz, 5000 Hz et 10000 Hz par WKB-P . . . . .	90
3.20	Résultats comparés de WKB-P et MEF 2D . . . . .	91
3.21	Comparaison des résultats MEF 2D et WKB-PC . . . . .	95
3.22	Couplage entre les modes évanescents et le mode propagatif . . . . .	96
3.23	Réponse en fonction du nombre de modes considérés pour WKB-PC . . . . .	96
4.1	Micromécanique de l'organe de Corti dans le plan transverse . . . . .	97
4.2	Géométrie du guide d'onde à deux degrés de liberté . . . . .	99
4.3	Réponse du guide d'onde à deux degrés de liberté par MEF-2 . . . . .	99
4.4	Lieux des racines pour le modèle à eux degrés de liberté par WKB-2 . . . . .	101
4.5	Réponse du guide d'onde à deux degrés de liberté par WKB-2 . . . . .	102
4.6	Domaine considéré pour WKB-EF . . . . .	103
4.7	Section transverse pour WKB-EF . . . . .	104
4.8	« Box model » . . . . .	107
4.9	Sections à la base et à l'apex pour WKB-EF . . . . .	108
4.10	Paramètres pour la validation de WKB-EF . . . . .	109
4.11	Lieux des racines pour WKB-EF . . . . .	110
4.12	Réponse de la section à la base par WKB-EF . . . . .	110
4.13	Modes de pression normée en fonction de $z$ . . . . .	111
4.14	Section paramétrée de l'organe de Corti . . . . .	112
4.15	Évolution de la section transverse de la base jusqu'à l'apex . . . . .	113
4.16	Physique de l'espace subtectorial . . . . .	115
4.17	Longueurs d'onde mesurées et obtenues par WKB-EF . . . . .	116
4.18	Lieux des racines obtenus par la méthode WKB-EF . . . . .	116
4.19	Champs de pression et déplacement de la structure par WKB-EF . . . . .	117
4.20	Modes de pression normés en fonction de la fréquence par WKB-EF . . . . .	117
4.21	Mode de déplacement du solide dans le plan transverse par WKB-EF . . . . .	118
4.22	Couplage mécanique longitudinal de la membrane tectoriale . . . . .	119
4.23	Mode évanescent de cisaillement de la membrane tectoriale par WKB-EF . . . . .	120
4.24	Lieux des racines avec couplage longitudinal par WKB-EF . . . . .	120
5.1	Géométrie du guide d'onde inspiré des cochlées artificielles . . . . .	125
5.2	« Box model » . . . . .	126
5.3	Réponses en fréquence par WKB . . . . .	127
5.4	Déformée des deux premiers modes de flexion . . . . .	127
5.5	Détermination des fréquences de réponses . . . . .	128
5.6	Profil d'un trou noir acoustique . . . . .	131

5.7	Trou noir acoustique dans une plaque en flexion . . . . .	131
5.8	Lieux des racines de la plaque immergée par WKB . . . . .	133
5.9	Ratio des modules des parties imaginaire et réelle du nombre d'onde par WKB . . . . .	134
5.10	Fonctions enveloppes de l'onde incidente et de l'onde réfléchie par WKB . . . . .	135
5.11	Coefficient de réflexion du trou noir acoustique . . . . .	136
5.12	Schéma du banc d'essai . . . . .	137
5.13	Trou noir acoustique intégré sur le banc d'essai . . . . .	138
5.14	Photographie du banc d'essai . . . . .	138
5.15	Actionneur et capteurs . . . . .	139
5.16	Conditions aux limites du guide d'onde . . . . .	139
5.17	Déformée opérationnelle mesurée . . . . .	141
5.18	Fonction enveloppe mesurée dans l'air . . . . .	141
5.19	Phase de la réponse mesurée . . . . .	142
5.20	Nombre d'onde mesuré . . . . .	143
5.21	Courbes tonotopiques expérimentales . . . . .	144
5.22	Cartes tonotopiques idéales par WKB . . . . .	145
5.23	Cartes tonotopiques expérimentales et théoriques pour l'air . . . . .	145
5.24	Influence du trou noir acoustique sur les cartes tonotopiques . . . . .	146
6.1	Schéma récapitulatif des travaux réalisés dans cette thèse . . . . .	156
A.1	Courbe de pondération des échelles de dB A, B et C . . . . .	158
B.1	Solutions de la relation de dispersion pour une plaque en flexion . . . . .	163
C.1	Mode de torsion du bâti . . . . .	165
C.2	Mode de flexion du bâti . . . . .	166
C.3	Comparaison de la courbe enveloppe mesurée expérimentalement avec le modèle WKB pour $f = 1523$ Hz dans l'air . . . . .	166
C.4	Comparaison de la courbe enveloppe mesurée expérimentalement avec le modèle WKB pour $f = 8723$ Hz dans l'air . . . . .	166
C.5	Comparaison de la courbe enveloppe mesurée expérimentalement avec le modèle WKB pour $f = 434$ Hz dans l'eau . . . . .	167
C.6	Comparaison de la courbe enveloppe mesurée expérimentalement avec le modèle WKB pour $f = 1721$ Hz dans l'eau . . . . .	167
C.7	Comparaison de la courbe enveloppe mesurée expérimentalement avec le modèle WKB pour $f = 3131$ Hz dans l'eau . . . . .	168



# Liste des principaux symboles

$\epsilon$	paramètre d'adimensionnalisation
$\eta_s$	coefficient d'amortissement structural
$\Gamma_e$	paroi encastrée
$\Gamma_{fs}$	surface d'interaction entre le fluide et le solide
$\Gamma_{pr}$	paroi rigide
$\mathbf{n}$	vecteur normal à la paroi
$\mathbf{u}_f$	champ vectoriel des vitesses dans le fluide
$\mathbf{u}_s$	champ vectoriel des vitesses dans le solide
$\mu_f$	viscosité dynamique du fluide
$\omega$	fréquence temporelle (pulsation)
$\Omega_f$	domaine fluide
$\Omega_s$	domaine solide
$\Phi$	potentiel des vitesses dans le fluide
$\rho_f$	masse volumique du fluide
$\rho_s$	masse volumique de la structure
$\sigma$	contrainte élastique dans le solide
$b$	largeur du canal fluide
$c$	célérité du son dans le fluide
$D(z)$	amortissement linéique
$D_f$	rigidité en flexion de la plaque
$E$	module de Young
$f$	fonction eikonale
$G$	module de cisaillement
$H$	hauteur du canal fluide
$h$	épaisseur de la plaque
$h_f$	hauteur de fluide équivalente
$I$	moment d'inertie

$k$	nombre d'onde
$k_a$	nombre d'onde acoustique
$L$	longueur du canal fluide
$M(z)$	masse linéique
$m_f$	masse de fluide équivalente
$p$	pression acoustique dans le fluide
$p_s$	pression d'excitation définie au niveau du stapès (étrier)
$R$	coefficient de réflexion
$S(z)$	raideur linéique
$t$	variable de temps
$T_z$	tension longitudinal appliquée à la structure
$v$	déplacement vertical de la structure
$v_x$	déformée transverse
$v_z$	amplitude d'une onde sur un guide de section constante
$x$	coordonnée transverse (selon la largeur)
$x_{fr}$	coordonnées des points appartenant à la surface de la fenêtre ronde
$x_s$	coordonnées des points appartenant à la surface du stapès
$y$	coordonnée transverse (selon la hauteur)
$z$	coordonnée longitudinale
$Z_s$	impédance mécanique de la structure à réaction locale



# Chapitre 1

## Introduction

L'oreille interne est composé de deux éléments aux fonctions différentes : le système vestibulaire et la cochlée. Le système vestibulaire est dédié à la perception et l'orientation spatiale. Il joue un rôle particulièrement important pour les pilotes de chasse ou les spationautes qui peuvent être soumis à de fortes accélérations ou de l'apesanteur qui perturbent leur perception de la gravité par exemple. La désorientation spatiale est un phénomène relativement fréquent chez les pilotes mais également chez certaines personnes souffrant de pathologies de l'oreille interne. Afin de mieux comprendre ce phénomène, l'axe de recherche en dynamique des structures du groupe MS2M de l'Institut Clément Ader s'est penché sur la modélisation du système vestibulaire [116, 117].

L'oreille interne comprend également une partie auditive. Afin de comprendre le comportement global de l'oreille interne, cette thèse porte sur l'étude du comportement dynamique de la partie auditive de l'oreille interne : la cochlée. Elle fonctionne en permanence et permet de ressentir l'environnement sonore. Par habitude, le fait d'entendre des sons paraît anodin mais la sensation résulte d'une procédure complexe. Le son parcourt une chaîne de transmission et passe par différents états avant d'être converti en signaux neuronaux interprétables par le cerveau. L'oreille est constituée d'un assemblage de cellules optimisées pour recueillir la plus petite perturbation sonore de l'environnement. Il est même parfois possible d'entendre le bruit thermique de l'air.

L'étude de cet organe par le mécanicien est un challenge des plus intéressants. La physique du vivant est un domaine très riche et les angles d'approches dans le cadre de la mécanique des structures sont multiples ce qui représente un formidable champ d'exploration.

L'étude de la cochlée est ici focalisée sur la mécanique passive de la propagation d'ondes dans un guide d'onde inhomogène à une dimension. Les ondes sont l'une des façons de représenter la vibration des structures. A ce point de vue, la mise en parallèle de la cochlée avec un autre guide d'onde inhomogène, le trou noir acoustique, révèle des perspectives intéressantes pour l'application de la mécanique cochléaire à d'autre champ de la mécanique. Cette deuxième partie représente un pont important entre la mécanique du vivant et la mécanique des structures.

Ce chapitre permet d'introduire le sujet. Dans un premier temps, les différents éléments anatomiques de l'oreille sont détaillés afin de fournir un cadre clair pour la présente étude. Ensuite, les différents travaux de recherche concernant la cochlée sont rappelés et la recherche actuelle est située par rapport à l'expérience acquise et à la littérature. La problématique de la thèse est alors placée dans ce contexte. Enfin, les différentes approches choisies pour répondre à cette problématique sont expliquées à travers le plan de la thèse.

## 1.1 Anatomie de l'oreille et fonctionnement physiologique

Un son est une variation de la pression d'un milieu fluide ou solide qui se propage grâce à l'élasticité de ce milieu. Dans le cadre de l'audition par voie aérienne, les sons provenant de l'air environnant et pénétrant dans l'oreille passent dans un premier temps dans l'oreille externe, puis ils parcourent l'oreille moyenne pour arriver à l'oreille interne (voir figure 1.1). La conduction osseuse est une voie secondaire de l'audition. Le son est

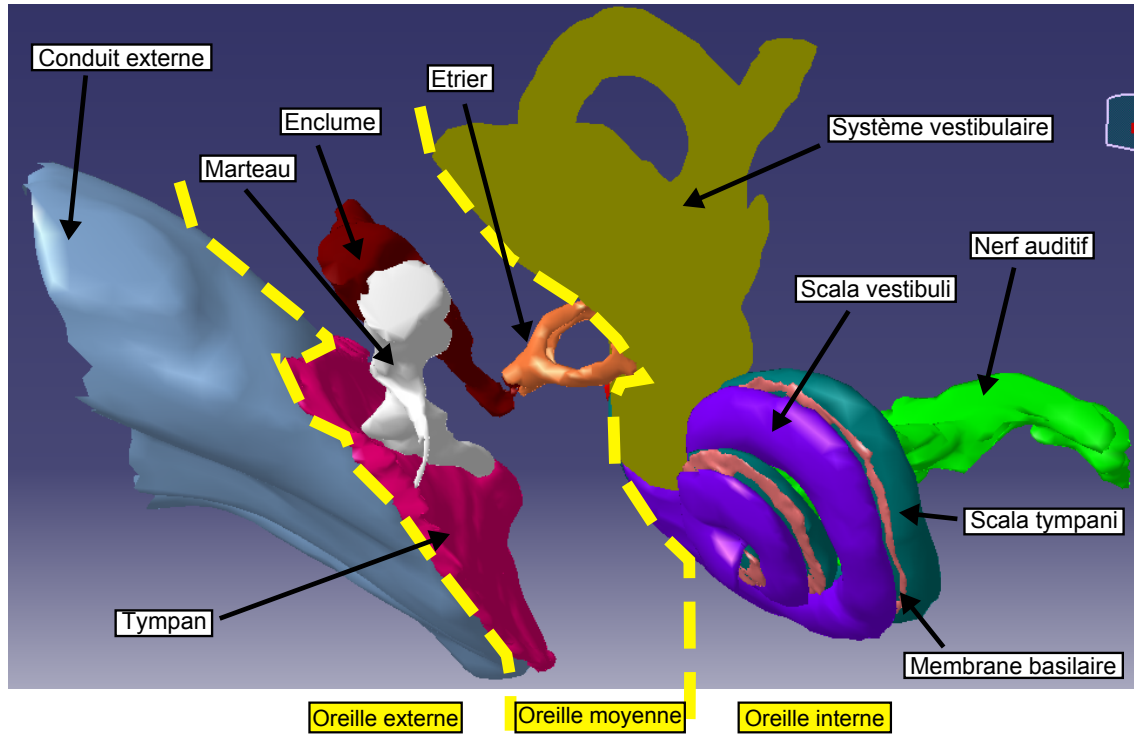


FIGURE 1.1 – Reconstruction numérique de l'oreille à partir de sections histologiques (données fournies par le Massachusetts Eye and Ear Infirmary par Charles Liberman et Haobing Wang).

transmis directement à la cochlée par l'intermédiaire des vibrations de l'os temporal (qui englobe l'oreille interne).

### 1.1.1 L'oreille externe

Le pavillon et le conduit externe ont pour fonction de conduire et de focaliser le son provenant de l'extérieur vers la chaîne de transmission du son et l'oreille moyenne. La forme du pavillon permet de capter le son sur une surface relativement large. Le conduit externe débouche sur la membrane tympanique dont la principale fonction est de transformer l'énergie acoustique des ondes sonores en énergie mécanique. Le marteau fixé sur la membrane tympanique est mis en mouvement par la vibration de cette dernière. Certaines études montrent que le pavillon et le conduit externe jouent un rôle dans la localisation de la source sonore [93, 92].

### 1.1.2 L'oreille moyenne

L'oreille moyenne est composée d'une chaîne ossiculaire comprenant trois osselets : le marteau, l'enclume et l'étrier, en latin respectivement, *malleus*, *incus* et *stapes*. La vibration de la membrane tympanique est transmise au marteau puis à l'enclume et enfin à l'étrier. Le rôle de l'oreille moyenne est d'adapter l'impédance mécanique pour passer d'un environnement acoustique en fluide léger à un environnement acoustique en fluide lourd. Le ratio de l'aire de la membrane tympanique sur l'aire de la fenêtre ovale est de l'ordre de 20 ce qui permet cette adaptation. En fonctionnement nominal, les osselets sont dans une cavité remplie d'air. Cette cavité est maintenue à la pression atmosphérique par la trompe d'Eustache, conduit relié à la cavité nasale. Certaines pathologies (notamment lorsque la trompe d'Eustache est congestionnée) voient cette cavité se remplir d'un fluide relativement visqueux qui gêne la vibration de la chaîne ossiculaire et provoque donc des pertes auditives [95]. Les osselets sont maintenus en position par un système de ligaments dont l'influence sur la transmission mécanique du son est faible. La raideur de ces ligaments peut cependant augmenter rapidement. Ce raidissement, appelé réflexe stapédien, permet de prévenir les éventuelles détériorations de la cochlée dues à des excitations trop fortes à basses fréquences (jusqu'à  $1\text{kHz}$ ) [95, 76].

Pour des niveaux d'excitation inférieur à 90 dB SPL (voir Annexe A), le comportement de l'oreille externe et de l'oreille moyenne reste dans un domaine linéaire. Le rapport des pressions à l'entrée (membrane tympanique) et à la sortie (fenêtre ovale) et le rapport de la vitesse de l'étrier sur la pression en entrée (membrane tympanique) permettent de caractériser une impédance linéaire de l'oreille moyenne [1]. Dans la plupart des études sur l'oreille interne, l'oreille moyenne n'est pas modélisée et seule la pression à la fenêtre ovale ou le mouvement de l'étrier sont pris en compte comme variables entrées pour représenter la cochlée.

### 1.1.3 L'oreille interne

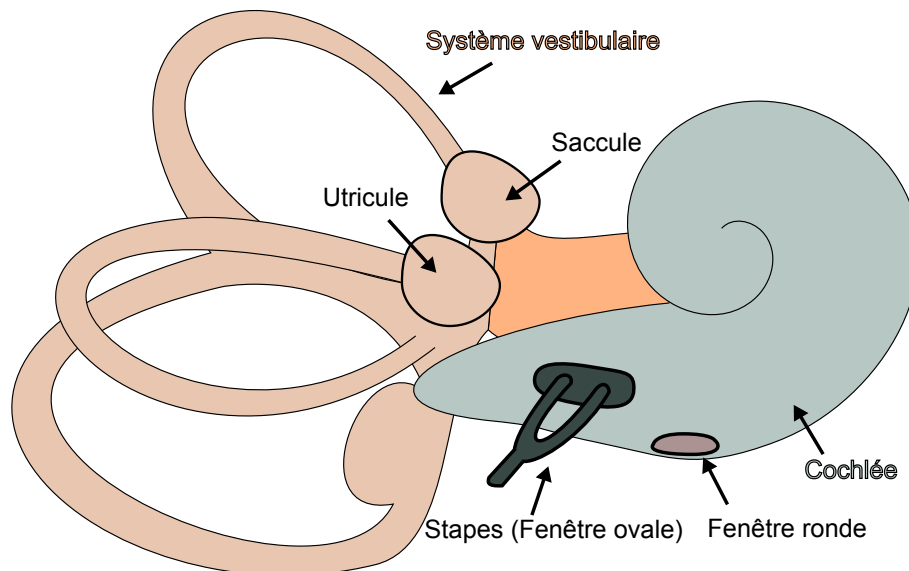


FIGURE 1.2 – Schéma illustrant les deux composants de l'oreille interne : le système vestibulaire et la cochlée.

L'oreille interne est constituée de deux éléments aux fonctions différentes. Le système vestibulaire est constitué de trois canaux semi-circulaires rempli de fluide dont le rôle est de mesurer les accélérations rotatoires subies par la tête. L'utricule et le saccule quant à eux, permettent de ressentir les accélérations linéaires. Cet organe permet à l'homme de s'orienter dans l'espace mais également de percevoir les vibrations et mouvements rapides imposées à la tête. L'une des applications du système vestibulaire est d'adapter le mouvement des yeux pour conserver une vision nette malgré les perturbations subies.

La seconde partie de l'oreille interne, appelée cochlée, constitue la partie finale de la chaîne auditive. Le son transmis depuis l'oreille moyenne arrive dans la cochlée qui a pour fonction de transformer l'information et d'envoyer des signaux correspondant au cerveau.

## 1.2 La cochlée

La cochlée est constituée chez les mammifères par un canal rempli de fluide enroulé sur lui-même. Ce canal est partitionné en trois canaux par la membrane de Reissner et la membrane basilaire. Chacune des cavités est remplie avec un fluide dont les caractéristiques physiques sont proches de celles de l'eau. Le scala media est séparé du scala tympani par la membrane de Reissner et du scala vestibuli par la membrane basilaire.

Le scala tympani et le scala vestibuli sont remplis de périlymphe et le scala media d'en-

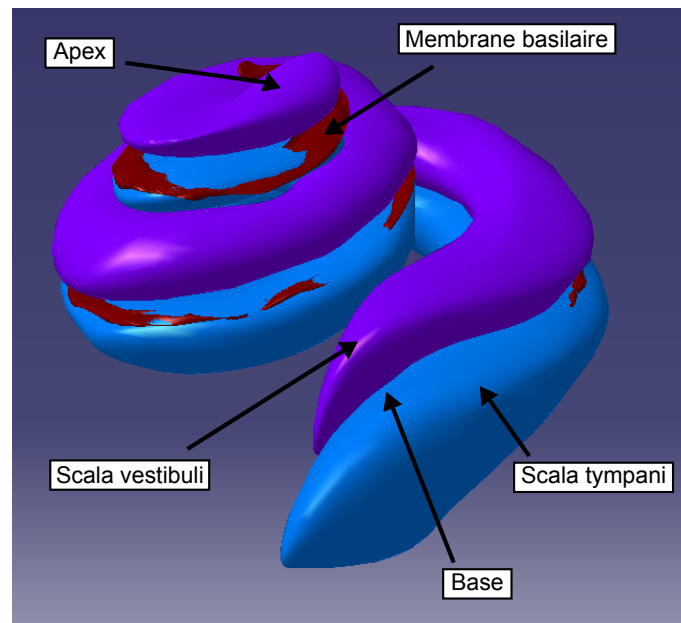


FIGURE 1.3 – Géométrie d'une cochlée obtenue à partir de sections histologiques (données fournies par le MEEI (Massachusetts Eye and Ear Infirmary), par Haobin Yang et Charles Liberman). La membrane basilaire (rouge), le Scala vestibuli (violet) et le Scala tympani (bleu) sont représentés. La membrane de Reissner n'apparaît pas dans les sections histologiques car son épaisseur est trop faible.

dolymphe. La seule différence entre ces deux fluides est leur composition chimique. Le périlymphe comprend des ions  $[Na^+]$  et  $[Cl^-]$  et possède un potentiel électromagnétique proche de l'équilibre électrostatique. Au contraire, le potentiel de l'endolymphe est maintenu autour de  $+80mV$  par les cellules de la paroi des canaux (strie vasculaire), qui produisent des ions  $[K^+]$  [102] (voir également le site internet *Promenade autour de la cochlée*). Ces ions jouent un rôle dans le comportement actif de la cochlée (voir section

1.2.2). La membrane de Reissner est très fine et influe peu sur la mécanique de l'oreille interne. Elle n'est presque jamais considérée et la cochlée est décrite comme un canal partitionné en deux (scala vestibuli et scala tympani) par la membrane basilaire.

Le scala vestibuli, comme son nom l'indique, communique directement avec le système vestibulaire. Dans le fonctionnement normal de l'oreille interne la pression statique du périlymphe est maintenue constante mais certaines pathologies modifient cette pression et perturbent le fonctionnement du système vestibulaire et de la cochlée. C'est le cas de la maladie de Ménière [74].

Sur l'une des parois du scala vestibuli se trouve la fenêtre ovale, où débouche la partie plate de l'étrier. La jonction entre la paroi du canal et l'étrier est réalisée par un ligament annulaire. Sur l'une des parois du scala tympani se trouve la fenêtre ronde. Elle est constituée d'un matériau très souple et permet d'équilibrer le déplacement de fluide provoqué par l'étrier. Les fenêtres ronde et ovale sont situées à la base de la cochlée, qui correspond au début de l'enroulement des canaux. L'autre extrémité des canaux, appelée apex, est le lieu de jonction du scala vestibuli et du scala tympani (voir figure 1.3) L'helicotrema est le passage permettant le transfert du fluide entre le scala vestibuli et le scala tympani.

### 1.2.1 Comportement passif

Les premières descriptions réalistes de l'oreille interne apparaissent au 19<sup>e</sup> siècle avec Corti, Reissner ou encore Von Hensen qui décrivent les éléments portant leur nom. Ces études sont purement descriptives et la physiologie n'est pas encore expliquée. La première théorie concernant le principe de fonctionnement provient de Helmholtz qui décrit l'oreille comme une série d'oscillateurs mécaniques dont les fréquences propres sont réparties sur une large gamme de fréquence. Il néglige les effets du fluide mais ce premier modèle constitue les bases de la mécanique cochléaire. Von Békésy réalise une série d'études qui

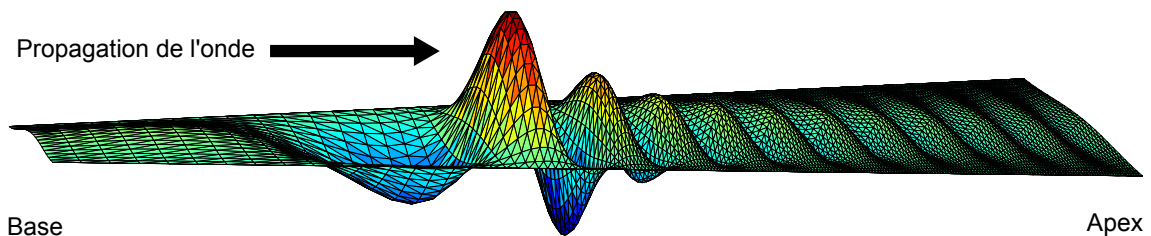


FIGURE 1.4 – Représentation d'une onde se propageant le long de la membrane basilaire déroulée. Près de la base, la longueur d'onde est grande et se réduit lorsque la place caractéristique est atteinte. Dans la zone apicale (proche de l'apex), la longueur d'onde est faible et l'amortissement est plus fort.

lui valent un prix Nobel en 1961. Il réalise notamment des expériences sur des cochlées de cadavres et observe des ondes se propageant (*travelling waves*) le long de la membrane basilaire [139]. Les ondes se propagent toujours de la base de la cochlée vers l'apex (voir figure 1.4), quelle que soit la position de la source d'excitation, ce que Békésy appelle le paradoxe de la direction de propagation le long de la cochlée [137]. Une excitation située à l'apex produit une onde se propageant de la base vers l'apex. Ce paradoxe s'explique par la présence d'un fluide permettant de coupler les oscillateurs et de les exciter tous en même temps. Békésy réalise également des expériences mettant en évidence ce phénomène sur des systèmes de pendules couplés les uns aux autres [138]. Afin de faciliter sa représentation, la cochlée est souvent déroulée. Son enroulement a peu d'effet physique et permet

avant tout un gain d'espace.

L'onde acoustique produite par l'étrier (oreille moyenne) modifie la pression dans le fluide. Lighthill [77] explique, en utilisant des principes énergétiques, que cette variation de pression peut être représentée par deux ondes se propageant dans la cochlée. L'onde de compression est très rapide et parcourt la cochlée quasiment instantanément avec une pression identique dans les deux canaux. Cette onde correspond à la propagation du son dans un milieu fluide proche de l'eau. La célérité de cette onde est proche de  $1500 \text{ m.s}^{-1}$ . Elle atteint donc l'apex en environ  $20 \mu\text{s}$ . La période du signal le plus bref distinguable (à 20 kHz) est de  $50 \mu\text{s}$ . La plus petite longueur d'onde des sons détectables est plus de deux fois plus longue que la longueur de la cochlée. L'onde de compression peut donc être considérée comme une onde plane. Elle a peu d'effet sur la mécanique de la membrane basilaire.

La seconde onde présentée par Lighthill est beaucoup plus lente et correspond à une différence de pression entre les deux canaux qui provoque la flexion de la membrane basilaire. La souplesse de la membrane basilaire étant dépendante de la position, la propagation de l'onde n'est pas constante le long des canaux. Lorsque la vibration de l'étrier est harmonique, l'amplitude de vibration maximale de la membrane basilaire est située en un lieu précis, appelé la place caractéristique. La place caractéristique dépend de la fréquence de l'excitation sinusoïdal, ce qui permet la distinction fréquentielle des sons. Pour les plus hautes fréquences (20 kHz pour une oreille humaine jeune et en bonne santé), la place caractéristique est localisée proche de la base. Au contraire pour les plus basses fréquences audibles (20 Hz), la place caractéristique est proche de l'apex (voir figure 1.5). De la même façon, pour chaque position  $z$  le long de la cochlée, une fréquence caractéristique est définie comme la fréquence provoquant la plus grande vibration en cette position. La relation qui établit la correspondance entre la fréquence d'excitation et la localisation de la vibration d'amplitude maximale est appelée tonotopie. Cette tonotopie provient de l'inhomogénéité de la membrane basilaire qui est plus raide à la base et plus souple à l'apex. Ce principe va être repris et expliqué dans cette thèse.

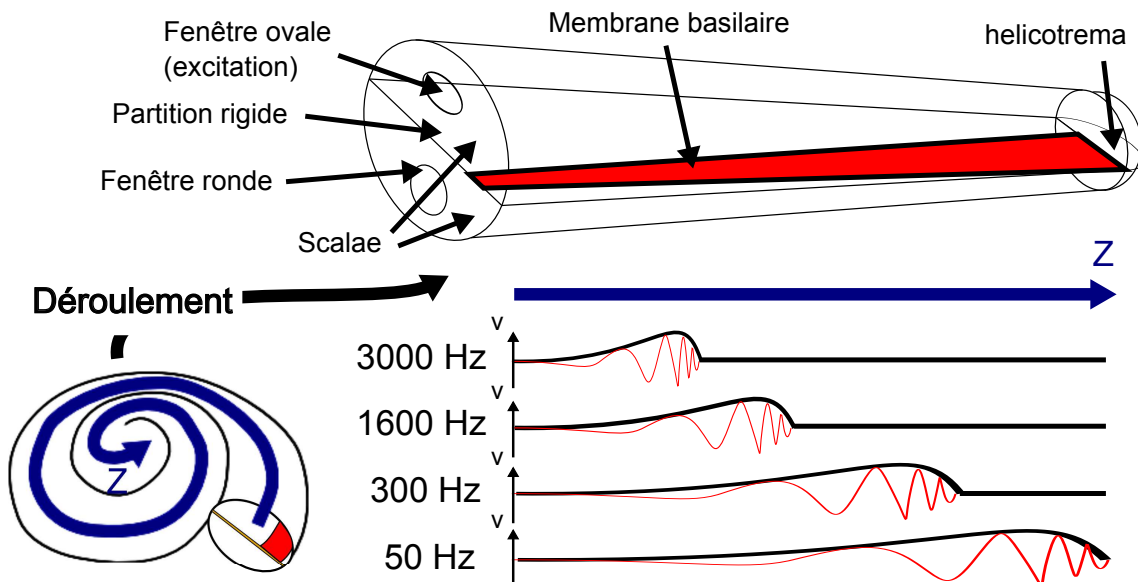


FIGURE 1.5 – Représentation de la cochlée déroulée. La tonotopie correspond à une localisation de la déformée en fonction de la fréquence.

La déformation de la membrane basilaire sur le passage de cette onde provoque la stimulation neuronale et la sensation de son par l'intermédiaire de l'action de l'organe de Corti

qui repose sur toute la longueur de la membrane basilaire (voir figure 1.6). Il mesure la vibration de la membrane basilaire et transmet l'information au cerveau. Le corps prin-

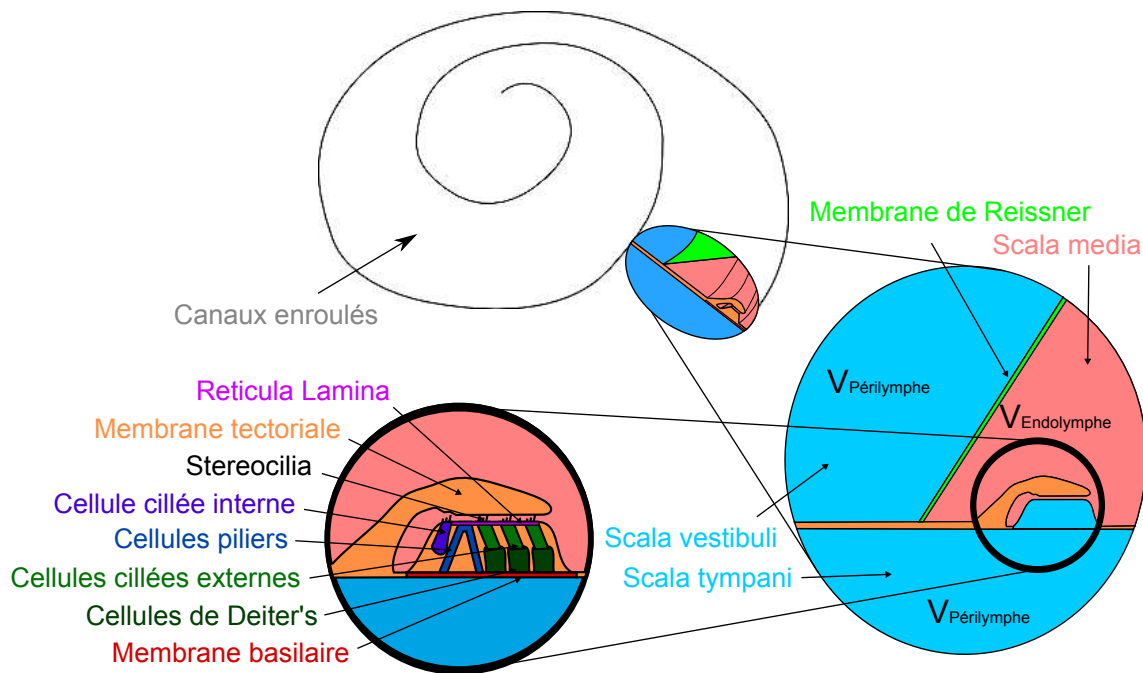


FIGURE 1.6 – Vue en coupe schématisée du canal de la cochlée. L'organe de Corti repose sur la membrane basilaire. L'information contenue dans le signal sonore est captée par les cellules cillées internes et externes. La membrane de Reissner sépare les potentiels électrochimiques de l'endolymphe ( $V_{Endolymphe}$ ) et du périlymphe ( $V_{Périmlympe}$ ).

cipal de l'organe de Corti est appuyé sur les cellules piliers qui sont relativement rigides. Ces cellules soutiennent la reticula lamina qui sert de support d'attache aux cellules cillées internes et externes. Les cellules cillées externes sont également soutenues par les cellules de Deiter qui assurent la jonction avec la membrane basilaire. La vibration de la membrane basilaire provoque le mouvement des différents composants de l'organe de Corti et notamment un mouvement de cisaillement de la membrane tectoriale par rapport à la reticula lamina. Il en résulte une stimulation des cellules cillées internes par le fléchissement de leurs cils (Stereocilia). Ces cellules transductrices transmettent le signal au cerveau via le nerf auditif. Le nerf auditif est composé de milliers de terminaisons nerveuses connectées aux cellules cillées internes et externes. Selon la fréquence de la vibration, le cerveau peut localiser les cellules stimulées et donc identifier la fréquence du son. La vibration provoque également la stimulation des cellules cillées externes qui participent à la transmission de l'information au cerveau mais qui sont surtout impliquées dans un phénomène réactif d'amplification de la vibration détaillé dans le paragraphe suivant.

### 1.2.2 Comportement actif

Gold [44] est le premier à suggérer un principe actif dans la cochlée. Cette théorie contradictoire avec les mesures de Von Békésy est appuyée par l'amélioration des moyens de mesure. La technique de mesure Mössbauer, apportée par Johnstone [57, 58], permet d'observer *in vivo* des comportements différents de ceux observés par Von Békésy sur les cochlées inertes.



### 1.2.2.1 Effets observables de l'activité de la cochlée

Le comportement actif est caractérisé principalement par une réponse non-linéaire par rapport à l'amplitude d'excitation. Plusieurs aspects de la non-linéarité sont observables :

- Rhode [111] montre que les niveaux de réponses dépendent de façon non-linéaire du niveau de l'excitation ce qui remet en cause la théorie en vigueur de la vibration linéaire. Le gain entre la vibration mesurée en entrée au niveau de l'étrier et la vibration de la membrane basilaire dépend de l'amplitude (voir figure 1.7, reprise de [115]).
- Les produits de distorsion sont des pics de vibration qui apparaissent sur la membrane basilaire lorsque celle-ci est stimulée simultanément par deux signaux harmoniques de fréquences différentes. Les distorsions sont localisées aux places caractéristiques correspondant à de nouvelles fréquences qui sont la combinaison linéaire des deux fréquences de base [21].
- La suppression à deux tons correspond à un phénomène similaire d'interaction entre deux excitations de fréquences différentes. La réponse à la place caractéristique est plus faible que dans le cas de l'excitation monofréquentielle [114].
- Par ses mesures, Kemp [61] montre que la cochlée possède une source d'énergie interne. Des sons appelés émissions otoacoustiques sont produits spontanément depuis la cochlée et peuvent être mesurés dans la cavité de l'oreille moyenne [105].

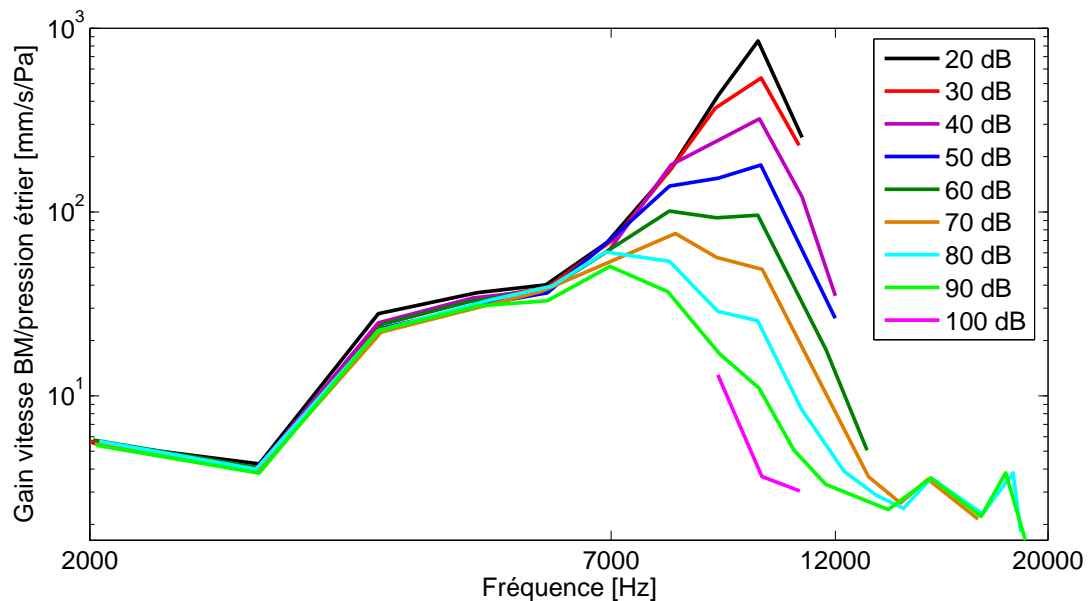


FIGURE 1.7 – Tracé des mesures expérimentales du gain (rapport vitesse de la membrane basilaire sur pression à l'étrier) de la cochlée active à la place caractéristique de  $10\text{kHz}$  en fonction de l'amplitude d'excitation. Pour des fréquences inférieures à la fréquence caractéristique, les courbes sont superposées, ce qui révèle un comportement linéaire. Au contraire, à la fréquence caractéristique, le gain est non-linéaire et varie en fonction de l'amplitude d'excitation. Figure retracée à partir de [115].



### 1.2.2.2 Fonctionnement physiologique

Le fonctionnement physiologique de l'amplification n'est pas encore totalement identifié mais il est possible de décrire les différents processus se produisant dans l'organe de Corti. Plusieurs effets se combinent. En isolant des cellules cillées externes et en les soumettant à des courants électriques, Brownell [7] révèle que les cellules cillées s'allongent et se rétrécissent en fonction de la polarisation du milieu. Dallos identifie une protéine, la prestine, comme étant responsable de cette mobilité somatique [154, 26]. Cette mobilité somatique est la première explication des phénomènes actifs dans la cochlée. La différence de potentiel entre le périlymphe et l'endolymphe est susceptible de provoquer des courants électriques qui modifient la polarisation des cellules cillées en s'introduisant par les touffes de cils. Hudspeth [54] montre que les touffes de cils dépassant des cellules cillées jouent un rôle de transducteur mecanoélectrique pour actionner les cellules cillées externes. De récentes observations montrent que le flux d'ions à travers les passages de transduction provoque la fermeture de ces passages et limite l'action des cellules cillées externes. Ce phénomène, appelé adaptation, est simultané à la production d'une force par les touffes de cils [62]. Les touffes de cils réagissent à la stimulation de façon particulière puisque leur raideur est négative pour des petits déplacements [89, 90]. Les cellules cillées externes sont pressenties pour être les actionneurs et les touffes de cils pour être la commande d'un système de retour actif appelé *cochlear amplifier* [2]. Le cycle de base du *cochlear*

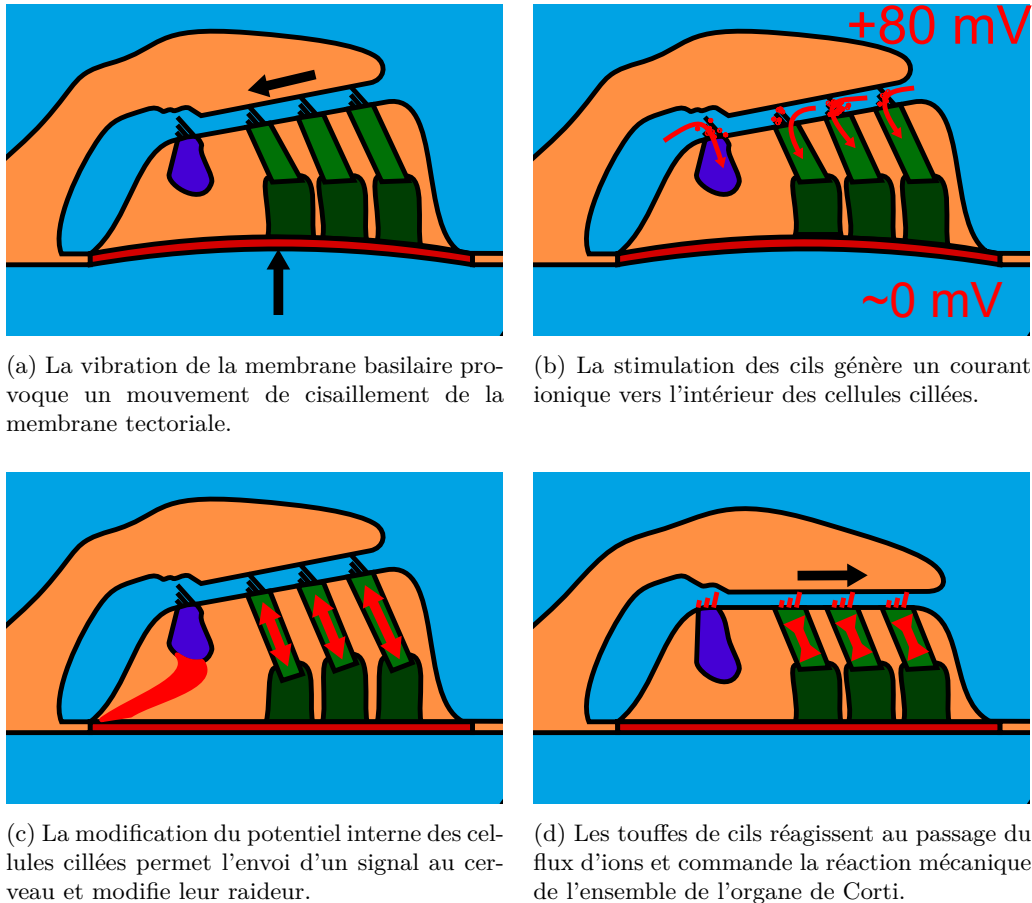


FIGURE 1.8 – Principe de l'amplification dans l'organe de Corti.

*amplifier* s'articule autour des étapes suivantes, également représentées schématiquement

sur la figure 1.8 :

- La vibration de l'ensemble de l'organe de Corti résulte en un mouvement de cisaillement entre la membrane tectoriale et le corps principal de l'organe de Corti (voir figure 1.8a).
- Ce mouvement stimule les touffes de cils des cellules cillées. La différence de potentiel constante entre l'endolymphe et le périlymphe génère des déplacements d'ions qui pénètrent dans les cellules cillées (voir figure 1.8b).
- La modification du potentiel des cellules internes cillées provoque l'envoi de signaux neuroniques au cerveau. Dans le même temps, les caractéristiques structurales des cellules cillées externes sont modifiées par le flux d'ions et la modification du potentiel interne des cellules (voir figure 1.8c).
- Les touffes de cils réagissent à l'exposition au flux d'ions et exercent une force qui tend vers un mouvement de retour à la position d'équilibre de la membrane tectoriale (voir figure 1.8d).

La combinaison de ces différents effets produit une réponse amplifiée pour une bande de fréquence étroite centrée sur la fréquence caractéristique. Le principe de fonctionnement physiologique présenté ici est très simplifié. Dans cette thèse, aucun modèle actif n'est considéré.

### 1.2.3 Caractérisation de la cochlée humaine

Les mammifères ont des cochlées dont le fonctionnement est similaire selon les espèces, bien que les dimensions et certaines caractéristiques diffèrent. L'étude des cochlées animales possède le gros avantage de disposer de données expérimentales *in vivo*. La mesure de la vibration de la membrane basilaire ou de la membrane tectoriale est possible en réalisant un perçage dans l'os pour le passage d'un faisceau laser. Ce procédé n'est évidemment pas applicable à l'homme. Aussi de nombreux modèles s'intéressent d'avantage à reproduire le comportement des cochlées animales. Robles rassemble de nombreuses données relatives aux cochlées humaines et animales [113].

#### 1.2.3.1 Dimensions

La cochlée humaine tient dans un volume cubique d'environ un centimètre cube. Les tubes déroulés imaginaiement mesureraient environ 35 millimètres pour un diamètre de l'ordre de 4 millimètres (à la base). Les données concernant les canaux ont relativement peu d'influence dans les modèles. Cependant, les données relatives aux dimensions de l'organe de Corti jouent un rôle important dans la micromécanique cochléaire. Ces données présentent une grande dispersion selon les auteurs et les moyens expérimentaux de mesure. La largeur de la membrane basilaire à la base est de l'ordre de 0,01 mm pour une largeur à l'apex de l'ordre de 0,5 mm. Son épaisseur est de l'ordre de quelques dizaines de micromètres.

#### 1.2.3.2 Réponse en fréquence et tonotopie

La cochlée humaine permet de distinguer des sons sur une gamme de fréquence allant de 20 Hz à 20 kHz. Chez certains mammifères, la limite haute peut monter jusqu'à 100 kHz. La tonotopie représente l'évolution continue de la position du maximum de la déformée dynamique de la membrane basilaire (place caractéristique) en fonction de la fréquence. Greenwood a étudié la répartition tonotopique pour de nombreuses espèces [46]. La courbe tonotopique d'une cochlée humaine (voir figure 1.9) montre une répartition proche d'une

courbe exponentielle (une droite en échelle logarithmique), excepté pour les basses fréquences. L'oreille humaine parvient à distinguer des sons ayant des fréquences différentes de 0,2% [24]. Cette grande sensibilité est due notamment au comportement actif.

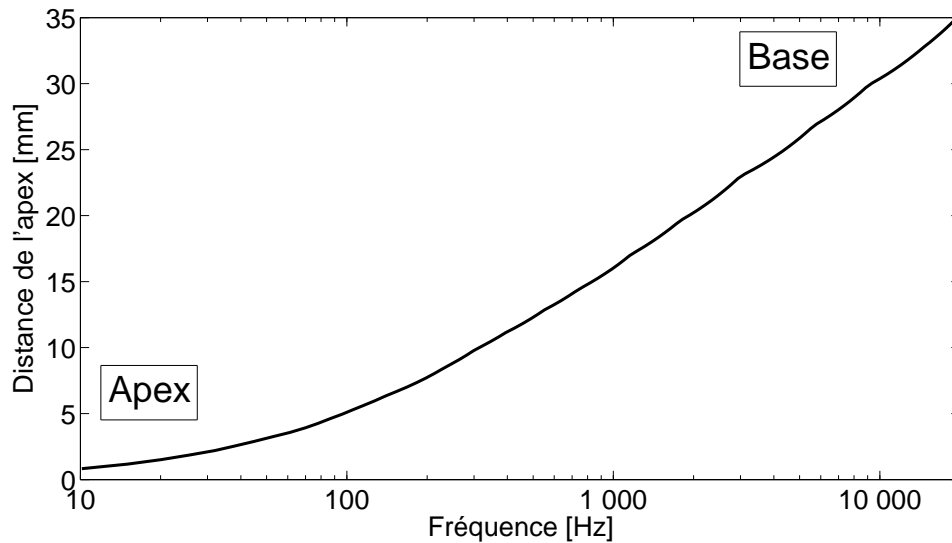


FIGURE 1.9 – Courbe tonotopique reliant la fréquence de vibration de la membrane basilaire à la place caractéristique. Cette carte est retracée d'après Greenwood [46].

### 1.2.3.3 Réponse dynamique

En acoustique, le son de référence correspond à une variation de pression de  $2 \cdot 10^{-5}$  Pa à 2 kHz. Le zéro de l'échelle des décibels (dB SPL pour Sound Pressure Level) est définie à partir de cette valeur (voir Annexe A). Les seuils de perception de l'oreille humaine dépendent de la fréquence, ce qui pousse les psychoacousticiens à utiliser des échelles tenant compte de cette variation (voir figure 1.10). Pour une gamme de fréquence moyenne (entre 1 kHz et 4 kHz), la plupart des individus distinguent des sons à partir de 4 dB SPL. Certains individus humains peuvent détecter des mouvements de l'air de l'ordre de grandeur du mouvement provoqué par le bruit thermique des atomes de l'air ( $\approx 5$  dB SPL). Cela équivaut à des mouvements de vibration de l'ordre du picomètre. Le déplacement de la membrane basilaire, mesuré *in vivo* à la place caractéristique, au seuil de l'audition, pour plusieurs espèces animales, est de l'ordre du nanomètre [113]. Ces données ne sont pas accessibles pour l'homme.

A l'autre extrémité de l'échelle, le seuil de douleur constitue la limite haute de la perception sonore. Selon la fréquence et les individus, ce seuil peut aller jusqu'à 120 dB (voir figure 1.10). La plage de fonctionnement de la cochlée couvre donc un gain de  $120$  dB soit 12 ordres de grandeurs pour la variation de pression. Au-delà de cette limite, les cellules ciliées et les touffes de cils risquent l'endommagement.

## 1.3 Contexte de l'étude

La recherche actuelle dans le domaine de la mécanique cochléaire est orientée vers la compréhension de la micromécanique de l'organe de Corti. Trois grands axes peuvent être

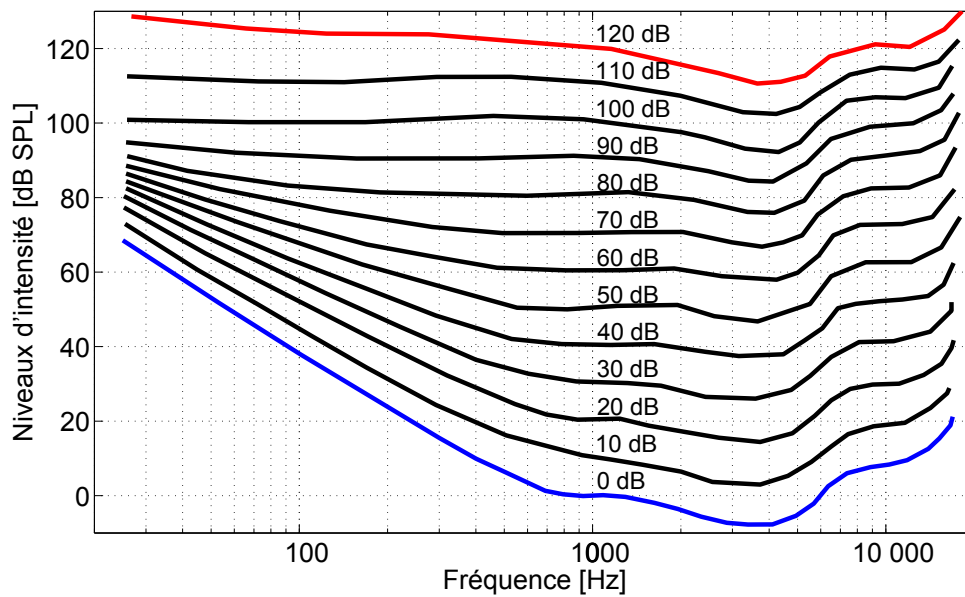


FIGURE 1.10 – Courbes d'isointensité perçue en fonction de la fréquence. La ligne bleue correspond au seuil auditif (0 dB A). La ligne rouge correspond au seuil de douleur. Entre les deux lignes, les niveaux de perception sont tracés empiriquement pour une série d'individus placés dans les mêmes conditions d'écoute. Courbe retracée d'après [35]. Cette courbe montre que l'oreille humaine n'est pas sensible à toutes les fréquences de la même façon.

dégagés [118] :

- Le premier axe concerne les composants de l'organe de Corti eux-même. Des phénomènes à l'échelle nanoscopique sont observés par de nouvelles techniques expérimentales. Au sein des touffes de cils, la jonction d'un cil à l'autre est réalisée par des connecteurs sous la forme de plusieurs protéines assemblées [124]. Ces protéines sont rattachées à chaque extrémité sur les cils au niveau des passages de transduction des ions. Différents sites sont suspectés être responsables du piègeage des ions dans les cils [142]. Ces phénomènes sont autant de sources d'intérêt pour la compréhension du comportement non-linéaire des touffes de cils. La prestine est reconnue responsable de la mobilité somatique des cellules cillées externe. Son comportement n'est pas encore totalement caractérisé. Des protéines sont isolées expérimentalement pour tenter de la caractériser [8, 34]. Des tests d'électro-motilité des cellules cillées sont également réalisés *in vivo* [110].
- Le second axe concerne le *cochlear amplifier*. L'ensemble des éléments de l'organe de Corti semble agir de concert pour transformer l'énergie chimique de la différence de potentiel entre les scalae en énergie mécanique pour amplifier la vibration. De nombreuses recherches sont liées à la caractérisation (par des mesures expérimentales) des phénomènes actifs non-linéaires qui apparaissent dans la cochlée [31, 81]. Ces mesures alimentent en paramètres ou en comparaisons les nombreux modèles existants [32, 91].
- Le troisième axe correspond à l'étude de la micromécanique passive de l'organe de Corti. L'aspect actif est lié à la stimulation des touffes de cils par le mouvement de

la membrane tectoriale. Une étude montre qu'une onde de cisaillement se propage également sur la membrane tectoriale [42] et que la modification des caractéristiques de la membrane tectoriale réduit la sensibilité globale de la cochlée. Or le mouvement de cisaillement est justement celui qui stimule les touffes de cils. L'interaction entre plusieurs modes de vibration pourrait provoquer une stimulation accrue des cellules cillées et donc favoriser le comportement actif [70, 69].

Les méthodes de mesures expérimentales sont diverses et les moyens disponibles progressent. L'imagerie en trois dimensions [106] va apporter une quantité d'informations supplémentaires sur la géométrie de l'organe de Corti et donc son fonctionnement.

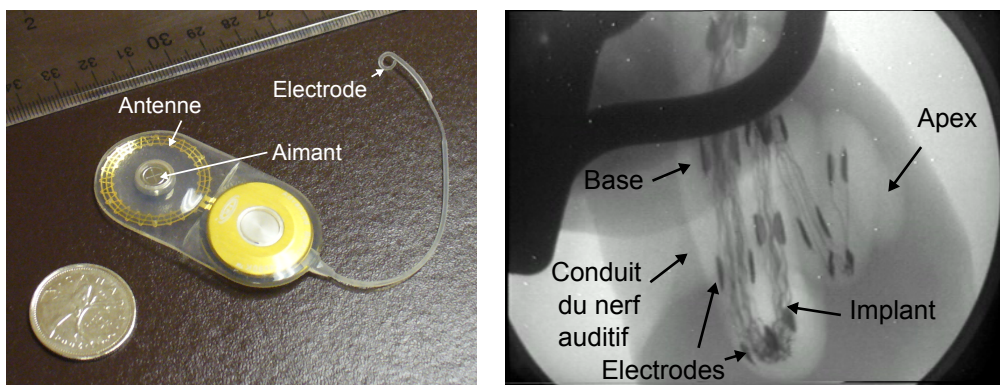
### 1.3.1 Applications

#### 1.3.1.1 Médecine

La recherche sur l'oreille interne est indispensable pour des applications médicales. La bonne compréhension de l'organe dans un fonctionnement normal permet de mieux comprendre et traiter les différentes pathologies qui peuvent l'affecter. Le comportement de l'organe de Corti sous l'effet de certains produits est mesuré et permet d'identifier la source des pathologies. La régénération des cellules cillées est également un espoir important pour les personnes souffrant de troubles sévères de l'audition [47, 36].

#### 1.3.1.2 Implants cochléaires

Les implants cochléaires désignent les dispositifs permettant de suppléer la fonction de l'organe de Corti lorsque celui-ci est défaillant [153]. Il existe différents types d'implants. Les personnes souffrant de surdité sont la plupart du temps pourvus de cellules cillées ne fonctionnant pas. La stratégie utilisée par les implants cochléaires est de stimuler directement le nerf auditif à l'aide d'électrodes insérées dans le scala tympani par la fenêtre ronde qui peut être percée puisque la fonction normale de la cochlée n'est plus assurée (voir figure 1.11). Un système externe, positionné derrière le pavillon, comprend un mi-



(a) Partie interne d'un implant cochléaire. L'électrode est déroulée avant la mise en place dans le limaçon. Image tirée de Creative Commons.

(b) Radiographie de l'implant en place dans la cochlée. Image fournie par le CHU de Purpan.

FIGURE 1.11 – Implants cochléaires utilisés pour substituer la fonction de l'oreille interne chez les personnes souffrant de pertes auditives sévères ou totales.

crophone et un processeur permettant de générer les signaux correspondant au son. Ces

signaux sont alors captés dans l'organisme par une antenne positionnée juste sous la peau. Les signaux sont appliqués aux différentes électrodes réparties le long de la cochlée afin de reproduire au mieux la sensation de son. Ce type d'implant donne de très bons résultats et permet à des personnes sourdes de retrouver un sens de l'audition [14, 38, 71]. Cependant, ces implants nécessitent une source d'énergie externe et d'autres types d'implants ont été imaginés et sont en cours de développement. L'idée est généralement d'imiter le fonctionnement de la cochlée en sectionnant spatialement les fréquences par un filtrage mécanique [121, 122, 147, 63, 3, 64]. Le principe est alors de convertir la vibration mécanique en énergie électrique par le biais de matériaux piézoélectriques. Ces systèmes sont désignés sous le nom de cochlées artificielles. Les performances sont encore loin de celles des implants cochléaires classiques mais ce concept est prometteur.

### 1.3.1.3 Capteurs acoustiques

Les performances exceptionnelles de la cochlées incitent à imaginer une reproduction de ces performances pour fabriquer des capteurs acoustiques fonctionnant sur une large bande de fréquence et une large gamme d'amplitude. Plusieurs capteurs ont déjà été ainsi développés [145, 146, 151]. L'intérêt de ces capteurs est de tenter de s'inspirer de la cochlée qui est le meilleur capteur acoustique connu. Sa sensibilité est très grande (deux fréquences distinctes de 0,5% peuvent être distinguées), sa plage dynamique de fonctionnement s'étend sur plus de 120 dB et débute proche du niveau de 0 dB SPL. Enfin, la cochlée est un sélecteur fréquentiel mécanique qui consomme peu d'énergie. Autant d'avantages qui apporteraient beaucoup aux capteurs acoustiques existants.

### 1.3.2 Motivations de l'étude

Cette thèse est focalisée sur l'étude de la mécanique passive de la cochlée. La membrane basilaire, sur laquelle repose l'organe de Corti, constitue une structure dont la vibration présente des caractéristiques complexes. Dans un premier temps, cette structure est assimilée à une structure simplifiée à un seul degré de liberté (la flexion de la membrane basilaire). Ce premier modèle élaboré reprend les modèles déjà décrits dans la littérature. Le modèle asymptotique et la méthode Wentzel-Kramers-Brillouin [28, 52, 132] sont choisis car ils permettent une approche utilisant la physique de la propagation d'une onde. La cochlée est représentée comme un guide d'onde dont les propriétés varient lentement. Une onde couplant flexion de la structure et variation du champ de pression se propage le long de ce guide. Différents modèles de structures peuvent être intégrés dans ce modèle pour représenter la membrane basilaire et l'organe de Corti. Dans un premier temps, la relation de dispersion permet de trouver le nombre d'onde en tout point du guide d'onde. L'équation de transport détermine ensuite l'amplitude de vibration. En utilisant le premier mode de propagation uniquement, les comparaisons des résultats avec des mesures *in vivo* sont bons [131, 80, 107]. Cependant, cette théorie utilise une approximation qui génère une erreur de calcul relativement importante juste en aval de la place caractéristique [28]. Ce modèle est implémenté et résolu dans cette thèse. Les résultats sont comparés à un modèle numérique résolu par la méthode des éléments finis et l'écart entre les deux modèles est effectivement constaté. Parthasarathi propose de créer artificiellement une transition entre la zone amont et la zone aval [104]. Cet ajustement numérique donne de bons résultats mais ne s'appuie sur aucune justification physique. Watts [141] présente un modèle prenant en compte l'action du second mode de propagation. Ce mode évanescent est généralement négligé car sa nature fait qu'il disparaît rapidement. Les résultats de Watts sont meilleurs mais présentent toujours un écart avec la méthode des différences

finies qu'il utilise comme référence. L'idée qui est développée dans cette thèse est de déterminer dans un premier temps l'ensemble des modes de propagation. La deuxième étape propose d'utiliser une solution sous la forme d'une somme (limitée à un nombre fini) des modes trouvés. Ce calcul doit permettre de prendre en compte l'influence habituellement négligée des modes évanescents.

Des travaux de recherches récents montre que l'interaction entre une onde de cisaillement sur la membrane tectoriale et l'onde de flexion de la membrane basilaire est susceptible d'amplifier la stimulation des cils [41, 112]. Lamb [69] représente un modèle simple comprenant deux degrés de liberté dans une section transverse. Deux modes propagatifs sont logiquement trouvés par la relation de dispersion. Dans le calcul de l'amplitude, les deux ondes sont superposées et uniquement reliées par les conditions aux limites à chaque extrémité du guide d'onde. La question se pose de savoir s'il est légitime de ne pas considérer de couplage entre ces deux ondes. Cette problématique rejoint la question soulevée par MacKay [85] à propos de la validité du modèle de *critical layer absorption* (qui correspond au comportement dans le modèle WKB). Il décrit le phénomène de *mode conversion* qui se produit lorsque, dans un guide d'onde inhomogène évoluant lentement, deux nombres d'onde propagatifs distincts (dont la partie réelle est grande devant la partie imaginaire) sont solutions et se rejoignent en un point pour donner lieu à deux modes évanescents. Ce phénomène se produit habituellement dans les plasmas ionisés [133] mais MacKay suggère que ce phénomène permettrait d'expliquer la plupart des comportements de la cochlée, y compris les aspects non-linéaires.

Une autre partie du travail présenté ici concerne le calcul des modes dans une section transverse. L'idée est de montrer, par une méthode de résolution numérique, et une représentation de l'organe de Corti simplifiée que plusieurs modes propagatifs existent. L'approche déjà abordée par Cai [9, 12] résout la méthode WKB mais en utilisant cette fois une méthode numérique pour calculer les modes de déformation transverse. Les résultats de Cai correspondent à un modèle de structure à réaction locale car il fait l'hypothèse de déformation plane. Ici, le travail est complété par l'étude d'une forme de couplage longitudinal.

Dans la cochlée, la tonotopie est créée par l'inhomogénéité du milieu de propagation. Cette caractéristique a pour effet de produire une amplitude maximale en un point précis mais également de diminuer l'amplitude de l'onde en aval ce point. Sur une large bande de fréquence, l'onde n'atteint pas l'extrémité du guide d'onde et n'est donc pas réfléchi [27]. Le niveau global de vibration est donc réduit. Ce concept est repris pour concevoir des silencieux acoustiques [108, 109]. Dans la cochlée, le fort amortissement nécessaire à l'atténuation des ondes provient des matériaux et de la géométrie de l'organe de Corti. L'espace subtectorial, situé entre la membrane tectoriale et la reticula lamina, est rempli de fluide et la viscosité même faible de ce fluide suffit à atténuer la propagation de l'onde. Dans les cochlées artificielles, les matériaux utilisés et les technologies de fabrication ne permettent pas de réaliser des formes aussi complexes que celle de l'organe de Corti et de son espace subtectorial. L'onde de flexion est réfléchi à la fin du guide d'onde et donne lieu à des ondes stationnaires. Ce phénomène est gênant car il peut dédoubler le pic de réponse maximale et le décaler en fréquence ou en position. L'augmentation de la viscosité du fluide permet d'obtenir des résultats intéressants sur l'atténuation de l'onde avant qu'elle n'atteigne le bout du guide d'onde [147]. Cependant, cet amortissement visqueux atténue la propagation sur toute la longueur du guide et également en amont ce qui est gênant lorsque qu'il s'agit de détecter la plus faible vibration possible.

Le trou noir acoustique est une alternative efficace pour atténuer l'onde une fois que celle-ci a atteint l'extrémité du guide. L'effet trou noir acoustique est mis en évidence par Miro-

nov [94]. Il se produit dans une structure mince (plaque ou poutre) dont l'épaisseur varie graduellement jusqu'à une épaisseur nulle. Mironov montre que l'onde de flexion se propageant dans la structure mince voit sa vitesse de propagation diminuer jusqu'à atteindre (théoriquement) une vitesse nulle. Une expérience mettant en œuvre ce principe sur un banc d'essai inspiré des cochlées artificielles est conçue et testée dans le cadre de cette thèse.

## 1.4 Plan du manuscrit

Après cette introduction bibliographique, le manuscrit est constitué de quatre chapitres.

Le second chapitre approfondit l'étude bibliographique. La physique de la cochlée est décrite et plusieurs modèles sont mis en place. La méthode des éléments finis est utilisée dans le cadre de modèles à deux et à trois dimensions. Un modèle est également développé dans le formalisme des systèmes hamiltoniens à ports. L'analyse de modèles numériques simples permet d'aborder la mécanique cochléaire et de fournir des résultats références.

Le troisième chapitre est dédié à l'étude des guides d'onde inhomogènes par un modèle de type asymptotique où la méthode Wentzel-Kramers-Brillouin est utilisée. Cette approche analytique, au contraire de l'approche numérique, cherche à représenter les phénomènes physiques par des lois mathématiques aux paramètres identifiés. Un sens physique est donné aux phénomènes qui se déroulent. Une nouvelle méthode est proposée afin de prendre en compte des interactions entre les différentes ondes qui se propagent dans l'oreille interne.

Le quatrième chapitre étudie les modes de vibration dans l'organe de Corti. Une méthode couplant une approche numérique pour la résolution transverse et une approche analytique pour la résolution longitudinale est proposée.

Enfin, le cinquième et dernier chapitre présente les travaux expérimentaux réalisés. L'observation d'une onde se propageant sur un guide d'onde inhomogène inspiré de la cochlée est réalisée. Les résultats expérimentaux sont analysés en comparaison avec le modèle développé dans le troisième chapitre.



## Chapitre 2

# Modèles mécaniques de la cochlée

Dans ce chapitre, quelques modèles élémentaires représentant le fonctionnement passif de la cochlée sont réadaptés de la littérature. L'objectif est d'approfondir l'étude bibliographique précédente en testant quelques hypothèses simples. Ce travail permet d'orienter la problématique de la thèse et le choix du modèle adéquat pour représenter la cochlée. La physique de l'oreille interne est tout d'abord décrite et les premières hypothèses sont posées. La méthode des éléments finis est appliquée au cas d'un modèle simplifiée de la cochlée. Un modèle en deux dimensions (2D), puis un modèle à trois dimensions (3D), sont développés. Une nouvelle méthode de représentation de la cochlée est ensuite introduite par la description d'un système Hamiltonien-à-ports. Le potentiel de cette méthode, notamment pour prendre en compte l'activité dans la cochlée, est expliqué. Enfin, le dernier point conclut sur le choix du type de modèle qui sera utilisé pour la suite de la thèse.

### 2.1 Description de la physique

Bien que le système vestibulaire et la cochlée communiquent directement à travers le périlymphe, leurs études respectives sont généralement découplées. En se focalisant sur la cochlée, sa physique peut être décrite par un système couplant des domaines fluides et solides (voir figure 2.1). Plusieurs hypothèses sont considérées dans le cadre de cette thèse.

#### 2.1.1 Considérations classiques

##### 2.1.1.1 Équations générales

###### Domaine fluide

Les équations les plus générales pour décrire le comportement d'un fluide sont les équations de Navier-Stokes [6]. Même lorsque l'écoulement moyen du fluide est nul, il peut être en mouvement autour d'une position d'équilibre. Cette hypothèse définit le cadre de l'acoustique. Les équations de Navier-Stokes peuvent être simplifiées dans ce cadre et les trois lois régissant le comportement du fluide sont l'équation d'Euler, l'équation de conservation de la masse et la loi de compressibilité du fluide. La manipulation de ces trois lois permet d'obtenir à l'équation d'Alembert impliquant uniquement la variation de pression  $p$  du fluide autour de la pression d'équilibre, vérifiée dans le domaine fluide  $\Omega_f$  :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = 0 \quad (2.1)$$

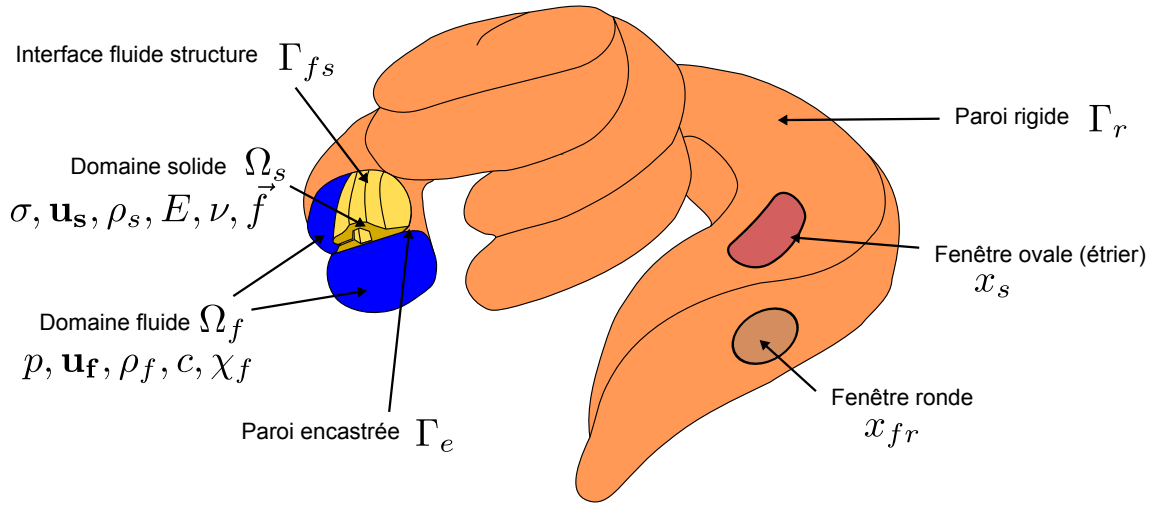


FIGURE 2.1 – Schéma réaliste de la cochlée en trois dimensions avec la représentation des domaines physiques fluide et solide.

où  $t$  désigne la variable de temps,  $\Delta = \nabla^2$  désigne l'opérateur Laplacien  $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$  dans l'espace cartésien à trois dimensions. La célérité du son  $c$  dans le fluide est calculée à partir du coefficient de compressibilité adiabatique  $\chi_f$  et de la masse volumique du fluide à l'équilibre  $\rho_f$  par :

$$c = \sqrt{\frac{1}{\chi_f \rho_f}} \quad (2.2)$$

### Équation d'onde

Lorsqu'un régime harmonique établi est supposé, la variation temporelle est représentée par un facteur  $e^{i\omega t}$  où  $i$  est le nombre complexe,  $\omega$  est la pulsation et  $t$  le temps. L'équation d'Alembert devient une équation de Helmholtz :

$$\Delta p + k_a^2 p = 0 \quad (2.3)$$

où  $k_a$  désigne le nombre d'onde acoustique calculé par :

$$k_a = \frac{\omega}{c} \quad (2.4)$$

Ce nombre d'onde acoustique est parfois négligé lorsque l'hypothèse d'incompressibilité est utilisée.

### Domaine solide

L'organe de Corti est un solide hétérogène qui peut être représenté par la loi de l'élasticité dans le domaine linéaire :

$$\vec{f} + \vec{\nabla} \sigma = \vec{0} \quad (2.5)$$

où  $\sigma$  est le tenseur des contraintes dans le solide,  $f$  est le vecteur des forces volumiques (inertie). L'utilisation de la mécanique des solides déformables et les hypothèses correspondantes est détaillées dans le chapitre 4.

### Structure équivalente

D'après les expérimentations de Békésy [139] sur les différents éléments de l'organe de Corti, la membrane basilaire est nettement plus raide que les autres éléments. Une simplification habituelle est de considérer l'ensemble de l'organe de Corti sur la membrane basilaire par une structure mince équivalente. Plusieurs modèles peuvent être utilisés pour représenter cette structure et sont détaillés dans cette thèse :

- Structure à réaction locale : la structure est composée d'une série d'oscillateurs linéaires (systèmes masse-ressort-amortisseur) dont les paramètres varient en fonction de la position de l'oscillateur.
- Membrane : la structure est une membrane tendue dans une ou plusieurs directions dans son plan.
- Plaque : la structure est une plaque qui possède une raideur en flexion et qui peut être chargée hors de son plan.
- Coque : la structure est une coque dont les caractéristiques sont similaires à celles de la plaque, dans le cas d'une surface non plane.

(structure à réaction locale, membrane, plaque, coque)

### Enroulement

L'enroulement de la cochlée a une influence relativement faible sur la réponse à basse fréquence [87, 18, 83, 11, 88] mais il est principalement lié à une notion de gain d'espace. Un modèle déroulé est plus généralement mis en place pour des raisons de simplification.

### Membrane de Reissner

La membrane de Reissner peut être négligée dans les modélisations acoustiques et mécaniques car sa souplesse est très grande et elle est totalement perméable aux ondes acoustiques. Son rôle principal est d'isoler chimiquement le scala media et le scala vestibuli.

### Gravité

La gravité n'a pas ou peu d'effet sur la mécanique de la cochlée et n'est pas considérée.

#### 2.1.1.2 Conditions aux limites

##### Conduction aérienne

L'une des hypothèses souvent utilisée est de considérer que l'os temporal est imperméable et rigide. La rigidité de l'os est nettement supérieure à celle de l'organe de Corti [139] et à la compressibilité du fluide [77]. La prise en compte de la déformabilité de l'os apporte peu. Cette hypothèse est fausse dans le cas de l'audition par conduction osseuse car c'est justement la vibration de cet os, stimulé par une vibration extérieure, qui provoque l'audition [75]. Uniquement la conduction par voie aérienne est considérée ici.

##### Oreille moyenne

La conduction aérienne est la voie classique de l'audition où le son parcourt l'oreille externe et l'oreille moyenne avant de parvenir à l'oreille interne. La mécanique de l'oreille moyenne est ignorée et seul le mouvement résultant de l'étrier est considéré comme variable

d'entrée de la cochlée. L'étrier est considéré comme un corps rigide et la condition limite est exprimée sous la forme d'une condition limite de pression :

$$p(\mathbf{x}_s, t) = p_s(\mathbf{x}_s, t) \quad (2.6)$$

où  $\mathbf{x}_s$  désigne les points situés sur la surface de l'étrier et  $p_s$  désigne un signal d'entrée supposé connu.

### Fenêtre ronde

La fenêtre ronde est fermée par une membrane suffisamment souple pour que son influence soit négligée. Une condition de pression nulle est alors considérée sur la surface de la fenêtre ronde :

$$p(\mathbf{x}_{fr}) = 0 \quad (2.7)$$

où  $\mathbf{x}_{fr}$  désigne les points de la fenêtre ronde.

### Parois

Pour être parfaitement définie, l'équation aux dérivées partielles (2.1) nécessite des conditions aux limites. Les conditions aux limites sont définies par les parois externes contenant le fluide et par les conditions aux parois internes. Puisque les parois des canaux sont considérés comme rigides, immobiles et imperméables le champ fluide vérifie une condition de vitesse nulle sur la paroi :

$$\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.8)$$

où  $\mathbf{u}_f$  représente le champ vectoriel des vitesses dans le fluide et  $\mathbf{n}$  le vecteur normal à la surface considérée.

## 2.1.2 Hypothèses propres à cette thèse

### 2.1.2.1 Équations générales

#### Activité

La cochlée est considérée comme passive. Aucun phénomène actif n'est pris en compte. Une piste de représentation est proposée au (2.3) afin d'ajouter la physique de l'actif au système global.

### Fluides périlymphatiques et endolymphatiques

Les solutions ioniques du périlymphe et de l'endolympe sont généralement considérées comme des fluides homogènes aux caractéristiques proches de l'eau. Les solutions ioniques ont un rôle prépondérant pour les modèles actifs puisque l'énergie générée dans la cochlée provient de ces ions [96].

### Transduction

La transduction de la vibration de l'organe de Corti par les cellules cillées [55, 49] en signaux neuronaux transmis au cerveau [23] n'est pas étudiée ici même si elle joue un rôle important dans la perception auditive puisque c'est l'étape finale avant l'analyse par le cerveau. De la même façon, la psychoacoustique qui étudie la perception des sons par le cerveau n'est pas mise en œuvre ici.

### Linéarité

La réponse de la cochlée est supposée linéaire. Dans la cochlée *in vivo*, le phénomène actif participe à créer des non-linéarités [113, 56] (voir section 1.2.2).

#### 2.1.2.2 Conditions aux limites

##### Parois internes

Les conditions limites sur les parois internes sont plus difficiles à définir car elles dépendent du mouvement de la structure déformable de l'organe de Corti. En effet, si la structure de la membrane de Reissner n'est pas considérée dans le cadre d'une étude acoustique, la structure de l'organe de Corti a, au contraire, un rôle très important. Cette structure déformable est plongée dans le fluide et subit donc ses variations de pression. Notamment, la différence de pression entre le scala media et le scala tympani provoque le mouvement. En retour, le mouvement de la structure impose un déplacement des frontières du domaine fluide et donc une variation du champ de pression. L'étude des systèmes couplés fluide/structure présente différents cas de figure. Dans le cas d'un couplage faible, l'une des deux physiques est prédominante et l'influence de l'autre physique est alors négligée. La membrane de Reissner par exemple subit l'influence du fluide mais l'énergie transmise en retour au fluide est trop faible pour être prise en compte. Dans le cas général, le couplage fort nécessite un calcul couplé du fluide et de la structure. Ici un couplage fort est supposé et il est montré plus loin que les trois cas de figure possibles (fluide dominant, solide dominant ou fluide et solide équivalents) sont réunis dans la cochlée. Le couplage fort est représenté par deux relations. Par la continuité du champ de vitesse, l'équation d'Euler relie le déplacement de la paroi solide au gradient de pression dans le fluide :

$$-i\rho_f\omega\mathbf{u}_s = \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \quad (2.9)$$

où  $\rho_f$  est la masse volumique du fluide et  $\mathbf{u}_s$  le déplacement du solide. La deuxième relation représente l'équilibre des efforts entre le domaine fluide et le domaine solide :

$$\sigma|_{\Gamma_{fs}} = -p|_{\Gamma_{fs}} \quad (2.10)$$

où  $\sigma$  désigne la contrainte dans le solide et  $\Gamma_{fs}$  est la surface d'interaction entre le fluide et le solide.

#### 2.1.3 Synthèse

La cochlée est finalement représentée par un canal droit dont la section est partitionnée en deux par une structure déformable équivalente de la membrane basilaire (voir figure 2.2). La structure déformable est une plaque ou une membrane dont la largeur varie en fonction de la position longitudinale, ce qui permet de faire varier sa raideur. Ce type de géométrie est appelée « box model » et est couramment utilisé dans la littérature. L'objectif d'un modèle est alors de déterminer la réponse du champ fluide et de la structure (ou du champ solide) à une pression stapédienne (ou un mouvement) d'excitation produit par un son.

## 2.2 Modèle passif par la méthode des éléments finis

Plusieurs auteurs ont développé des modèles par éléments finis très détaillés de la cochlée. Cependant, un inconvénient rend la tâche difficile. La cochlée possède plusieurs

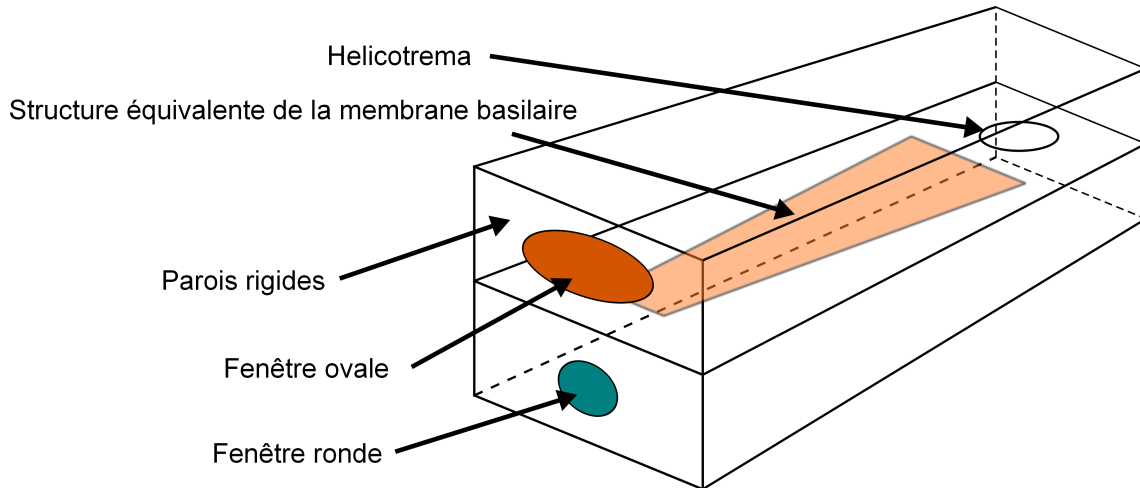


FIGURE 2.2 – Représentation de la physique passive de la cochlée par un « box model ».

échelles de longueurs (longueur des canaux, rayon de la section de canaux et taille des éléments de l'organe de Corti. Afin de représenter ces trois échelles de longueur simultanément, un modèle par éléments finis tridimensionnel requiert un nombre très important de degrés de liberté. Le coût en temps de calcul devient rapidement rédhibitoire [20]. D'autres méthodes numériques sont d'ailleurs confrontées au même problème [43].

Ici, la méthode des éléments finis est utilisée avec l'aide du logiciel COMSOL Multiphysics®. La méthode est préimplémentée pour différents types de physique. Un premier modèle en deux dimensions utilise différents types de comportement structuraux afin de mettre en évidence le principe de tonotopie. Ensuite, un modèle tridimensionnel est testé.

### 2.2.1 Modèle bidimensionnel

Afin de mettre en évidence le principe de base de la tonotopie dans la cochlée, un modèle à deux dimensions est suffisant.

#### 2.2.1.1 Hypothèses

La méthode des éléments finis est utilisée avec l'aide le logiciel COMSOL Multiphysics®. Ce logiciel a été choisi car il permet une approche rapide des éléments finis et intègre des couplages de plusieurs physiques. Le module *Acoustics* et le module *Solid mechanics* sont utilisés dans cette étude.

Une géométrie très simplifiée est utilisée pour ce premier modèle (voir figure 2.3). Un unique canal rempli de fluide est représenté par un rectangle. La paroi supérieure du rectangle est considéré comme une paroi rigide. Une pression nulle est appliquée sur la frontière droite et une pression d'excitation est appliquée sur la frontière gauche. La paroi inférieure représente la structure de la membrane basilaire. Plusieurs types de structures sont étudiés pour représenter la membrane basilaire. Une structure à réaction locale est d'abord mise en place, puis une structure de type membrane et enfin une structure de type poutre sont appliquées. Ces trois types de modèles sont équivalents en deux dimensions aux modèles d'impédance locale, de membrane et de plaque couramment utilisés dans le cadre de la mécanique cochléaire. Le modèle de structure à réaction locale est comparé à la littérature [99].

Pour représenter le comportement du fluide en régime harmonique linéaire, l'équation

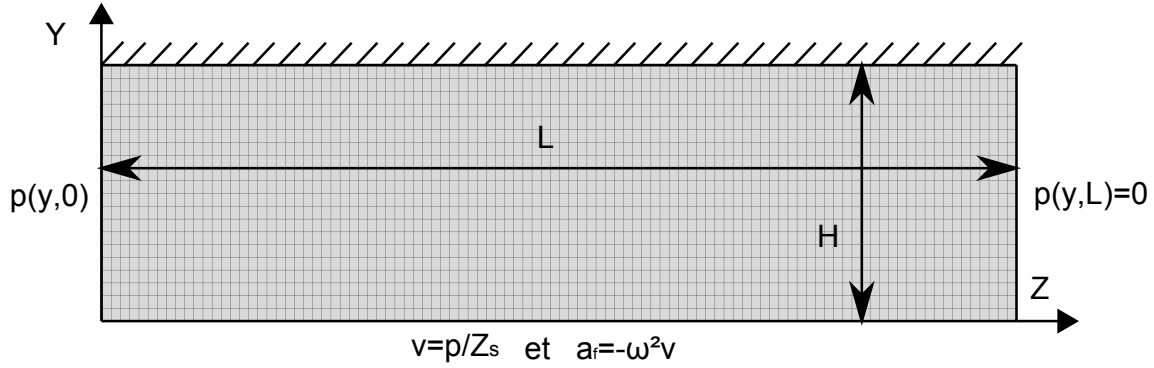


FIGURE 2.3 – Définition du modèle bidimensionnel par éléments finis sous le logiciel COM-SOL Multiphysics®. Le domaine fluide est maillé par des éléments quadrangles et les conditions limites sont appliquées sur les quatre frontières.  $p$  est la pression dans le domaine fluide,  $v$  est le déplacement de la structure,  $Z_s$  est l'impédance mécanique de la structure et  $a_f$  est l'accélération du fluide.

acoustique d'Alembert (2.1) est appliquée dans un domaine rectangulaire de longueur  $L$  et de hauteur  $H$ . Le choix des paramètres étant arbitraire à ce stade, la largeur  $b$  du domaine fluide dans la direction hors-plan ( $X$ ) est supposée unitaire pour simplifier les calculs. Les conditions limites sont les suivantes :

- $(\partial p / \partial n = 0)$  pour la frontière supérieure.
- $(p = 0)$  pour la frontière droite.
- $p = p_s$  pour la frontière gauche.
- L'accélération du fluide  $a_f$  sur la frontière inférieure est imposée par la structure.

Afin de définir le déplacement de la structure, le choix d'un modèle doit être précisé.

Paramètre	Symbole	Unité	Cheng	Neely
Masse volumique du fluide	$\rho_f$	$[kg/m^3]$	1000	2000
Hauteur du canal	$H$	$[m]$	$1e^{-3}$	$1e^{-3}$
Masse linéique	$M(z)$	$[N.s^2.m^{-2}]$	1	1, 5
Amortissement linéique	$D(z)$	$[N.s.m^{-2}]$	$0.05\sqrt{MS}$	2000
Raideur linéique	$S(z)$	$[N.m^{-2}]$	$1e^{10}e^{(-100z)}$	$1e^{10}e^{(-200z)}$
Largeur	$b$	$[m]$	1	1
Longueur	$L$	$[m]$	$35e - 3$	$35e - 3$

TABLE 2.1 – Valeur des paramètres utilisés pour le modèle par éléments finis à deux dimensions. Paramètres repris de [19] et [99]. La masse volumique est doublée car le modèle de Neely considère deux canaux et le champ de pression est supposé symétrique dans la hauteur.

### Structure à réaction locale

Dans un premier temps, une structure à réaction locale est représentée par une impédance mécanique  $Z_s$  qui dépend de la position longitudinale  $z$  :

$$Z_s(z) = -\omega^2 M(z) + i\omega D(z) + S(z) \quad (2.11)$$

Les paramètres  $M(z)$ ,  $D(z)$  et  $S(z)$  correspondent respectivement à des termes de masse, d'amortissement et de raideur. La valeur de ces paramètres est reprise du modèle développé par Cheng [19] (voir table 2.1). Ce modèle structural n'inclut aucun couplage longitudinal dans la structure. Uniquement le déplacement vertical  $v$  (selon  $Y$ ) est considéré et l'équation d'équilibre de la structure est alors donnée par :

$$v(z) = \frac{-p(z)}{Z_s(z)} \quad (2.12)$$

Dans le logiciel, une variable correspondant à  $v(z)$  est créée le long de la paroi inférieure. Dans le même temps une accélération proportionnelle à cette variable, selon la relation d'Euler 2.9, est appliquée sur le fluide.

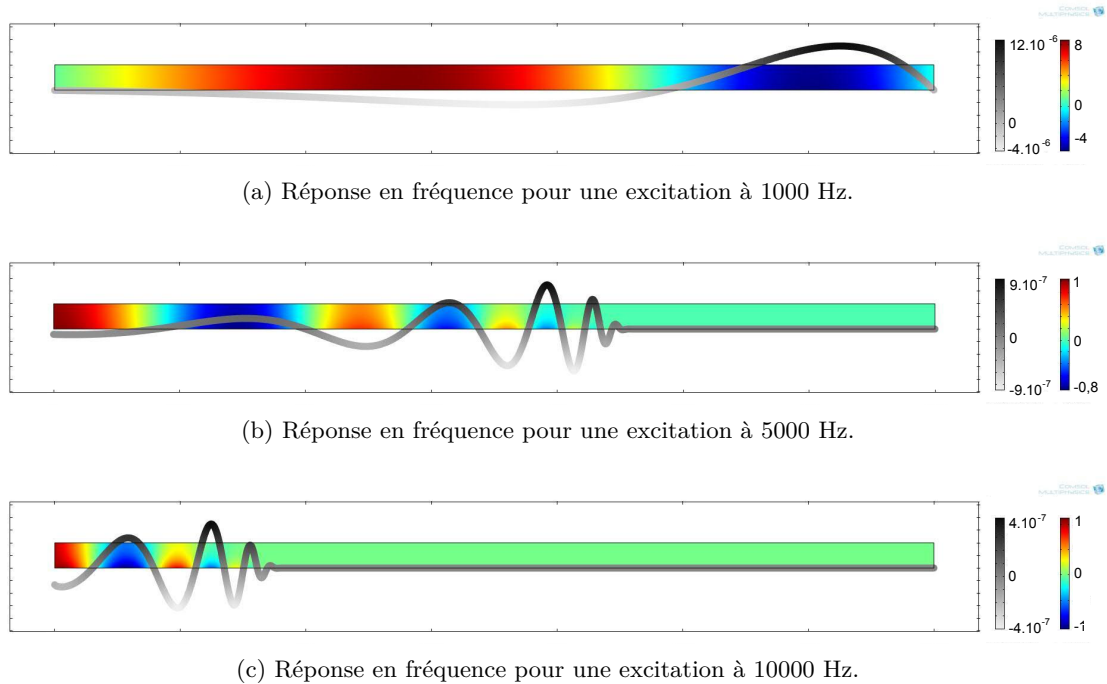


FIGURE 2.4 – Réponse en fréquence du modèle éléments finis 2D incluant une structure à réaction locale. Courbes tracées pour trois fréquences :  $1000Hz$ ,  $5000Hz$  et  $10000Hz$ . L'échelle de couleur représente la pression acoustique. L'échelle de gris représente le déplacement de la structure. La déformée instantanée de la structure est amplifiée pour être visible.

### Structure de type membrane

Pour le cas d'une structure de type membrane, un terme de tension longitudinale (selon  $Z$ ) modifie l'équation d'équilibre de la structure. Seule une tension longitudinal  $T_z$  est considéré dans ce modèle  $2D$ . Une tension dans le plan transverse pourrait ici



être assimilée à une raideur et intégrée dans le terme  $S(z)$ . La tension longitudinal  $T_z$  est considérée comme constante. L'équation d'une membrane fait intervenir la dérivée seconde du déplacement [45] :

$$T_z \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2} + p(z, t) = \rho_s \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial t^2} \quad (2.13)$$

où  $\rho_s$  est la masse linéique de la membrane. En considérant un modèle couplant la structure à réaction locale précédente (voir section 2.2.1.1) et la structure de type membrane, l'équation d'équilibre en régime harmonique peut être exprimée sous la forme :

$$T_z \frac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2} + Z_s v(z) = -p(z) \quad (2.14)$$

La dérivée partielle requiert l'utilisation du module *Boundary PDE* de COMSOL®. La variable indépendante définie pour cette physique correspond au déplacement vertical  $v(z)$ .

### Structure de type poutre

Les structures de type poutre possèdent une rigidité en flexion  $D_f$  qui peut s'exprimer en fonction des paramètres de la section de la poutre. L'équilibre de la poutre peut alors s'exprimer par l'équation [45] :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( D_f \frac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2} \right) + \rho_s h \frac{\partial^2 v(z)}{\partial t^2} = p(z, t) \quad (2.15)$$

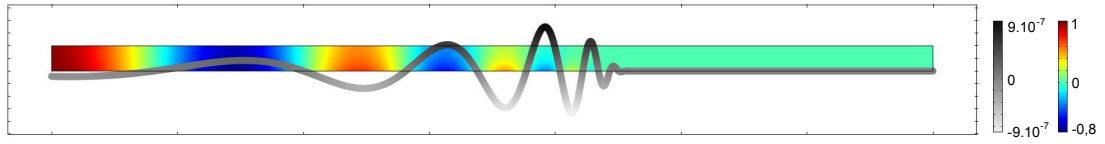
où  $h$  est la hauteur de la section de la poutre. Dans un régime harmonique, l'équation couplant le modèle poutre avec la structure à réaction locale peut être exprimée par :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( D_f \frac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2} \right) + Z_s v(z) = -p(z) \quad (2.16)$$

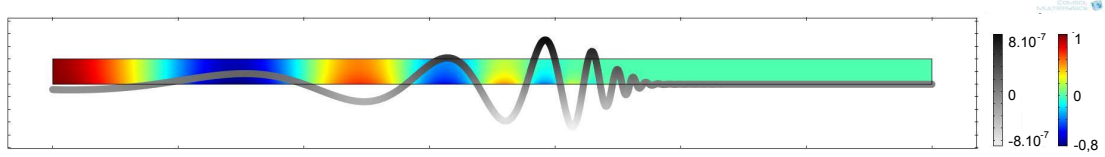
Le module *Beam* de COMSOL® est utilisé pour implémenter cette équation. La combinaison entre un modèle structural de type membrane et un modèle de type poutre est réalisable en ajoutant un terme de tension longitudinale à la poutre.

#### 2.2.1.2 Résultats

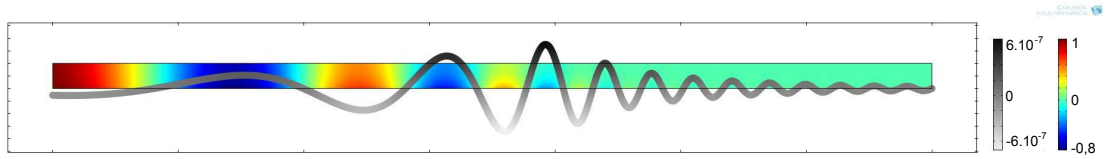
Une résolution de type réponse en fréquence est utilisée pour différentes fréquences (pulsations) temporelles  $\omega$ . Le champ de pression est représenté avec une échelle de couleur et le déplacement de la structure par une ligne oscillante en échelle de gris (voir figure 2.4). Le déplacement de la structure représenté est amplifié pour des raisons de visualisation. La réponse est une réponse instantanée avec une phase de 0 radian. Le module de cette valeur permet d'obtenir une courbe enveloppe (voir figure 2.6). La déformée atteint un maximum situé en différents points selon la fréquence d'excitation. A basse fréquence, la déformée est localisée proche de la paroi droite (apex) et à haute fréquence, la déformée est proche de la paroi gauche (base). L'amortissement est suffisamment important pour que la vibration soit atténuée en aval de ce maximum. Les champs de pression sont presque uniformes sur la hauteur en amont du pic de réponse ce qui correspond à la zone des grandes longueur d'onde. Dans la zone du pic de réponse, le champ de pression varie en fonction de la hauteur et l'interaction fluide/structure est équilibrée. Enfin, en aval du pic de réponse, le champ de pression est très faible et la structure est peu déformée.



(a) Réponse en fréquence pour une excitation à 5000 Hz dans le cas de la structure à réaction locale.



(b) Réponse en fréquence pour une excitation à 5000 Hz dans le cas de la structure de type membrane. La tension longitudinale de la membrane est de  $T_z = 1 \text{ N.m}^{-1}$ .



(c) Réponse en fréquence pour une excitation à 5000 Hz dans le cas de la structure de type poutre. La rigidité en flexion est de  $D = 1e^{-6}$ .

FIGURE 2.5 – Comparaison des réponses à 5000 Hz pour les modèles de structure à réaction locale, de type membrane et de type poutre.

Les différents modèles de structures sont comparés pour la même fréquence ( $5000 \text{ Hz}$ ) avec la même pression d'excitation. La comparaison des trois modèles structuraux montre que le comportement est globalement similaire. Cependant, de petites différences sont à relever :

- Les amplitudes de réponse sont légèrement différentes (pour la même pression d'excitation). Cela provient des termes de raideur supplémentaire apportés par la membrane ou la poutre.
- La réponse de la membrane présente plus d'oscillations en aval du pic de réponse que le modèle de structure à réaction locale.
- Le modèle de type poutre présente encore plus d'oscillations en aval du pic de réponse. Ces observations sont à relativiser car les paramètres de tension et de rigidité de flexion sont choisis arbitrairement et ne correspondent pas à des paramètres physiques.

La comparaison avec un autre modèle numérique, celui de Neely [99] (voir table 2.1) montre une relativement bonne corrélation (voir figure 2.6). Afin de pouvoir comparer les deux modèles sur la même référence, les amplitudes de réponse sont normalisées et le maximum est réglé sur  $+10 \text{ dB}$ . Les pics de réponse correspondant à la place caractéristique sont localisés à la même position longitudinale et les tendances sont similaires. Un écart de pente est à relever en amont de la place caractéristique. En aval, la cassure est bien représentée mais là encore, un léger écart subsiste. Ces différences entre les deux modèles proviennent de la méthode numérique qui ne réalise pas les mêmes approximations.

Le maillage comprend 224000 éléments quadrangles de Lagrange du second ordre. Le temps de calcul pour une pulsation est de l'ordre de la seconde sur un ordinateur standard. Le nombre d'éléments et donc leurs tailles ont une influence sur le résultat. Le même

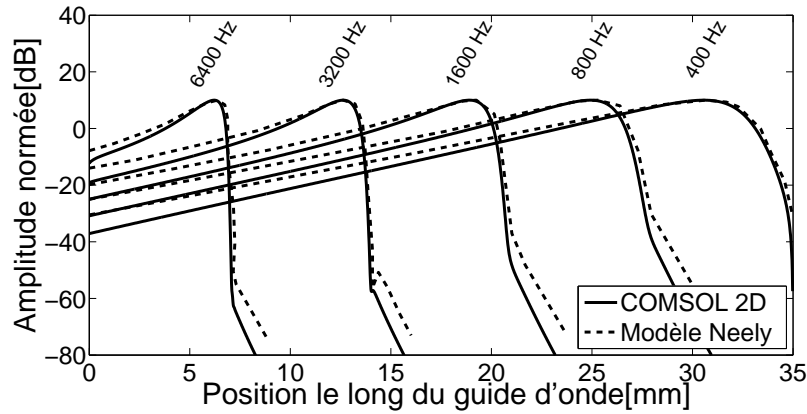


FIGURE 2.6 – Comparaison avec le modèle par différences finies développé par Neely [99].

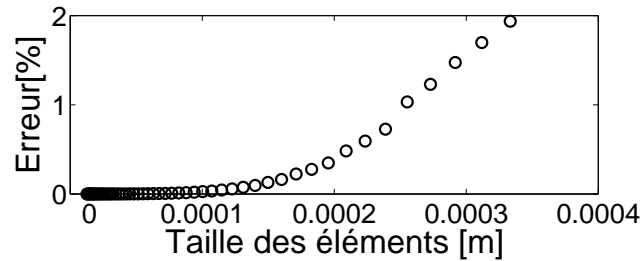


FIGURE 2.7 – Convergence de la discrétisation des éléments finis. L'erreur tracée correspond à la différence des moindres carrés de la déformée par rapport à la déformée ayant le plus petit maillage.

calcul est réalisé avec des maillages de tailles différentes. La différence entre les résultats est mesurée par la méthode des moindres carrés par rapport à la déformée avec le maillage le plus petit (voir figure 2.7). Puisqu'il n'existe pas de solution analytique à ce problème, la comparaison par rapport à l'une des réponses permet d'observer la convergence. Ces premiers résultats permettent d'avoir une référence pour ces modèles relativement simples. Ils sont utilisés par la suite comme référence pour les cas de base. La représentation du champ de pression et du déplacement de la structure sont visuellement représentés. Cependant, les phénomènes physiques mis en jeu sont difficilement observables sur ces modèles.

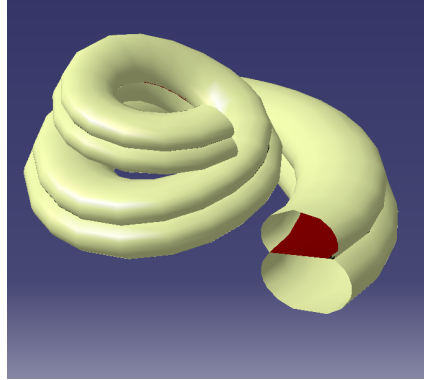
## 2.2.2 Modèle tridimensionnel

Le modèle par la méthode des éléments finis dans un domaine tridimensionnel reprend le même principe que dans le cas bidimensionnel. Les EDP sont cette fois résolues dans des éléments tridimensionnels ayant donc plus de degrés de liberté. Les modèles à trois dimensions permettent une représentation plus fidèle de la géométrie.

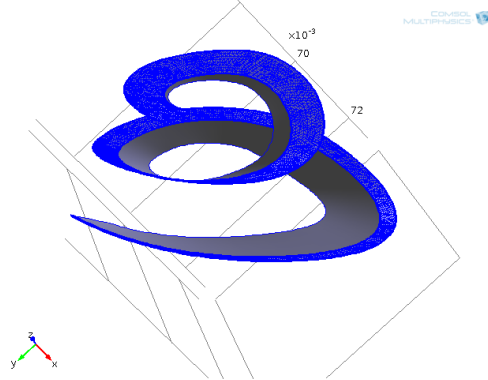
### 2.2.2.1 Géométrie enroulée de la membrane basilaire

Dans un premier temps, la représentation de la cochlée est simplifiée : une membrane de largeur variable constitue la géométrie du modèle étudié. La géométrie est reconstituée

sous le logiciel de Conception Assistée par Ordinateur (CAO) CATIA®, d'après les données histologiques fournies par la Massachussets Eye and Ear Infirmary (MEEI). La géométrie est approximée à l'aide de segments de droites, de cerles et d'ellipses. La membrane basilaire est représentée par une surface appuyée sur la partition rigide des canaux (voir figure 2.8). Un modèle de type « coque » est appliqué sur cette surface. La largeur de la mem-



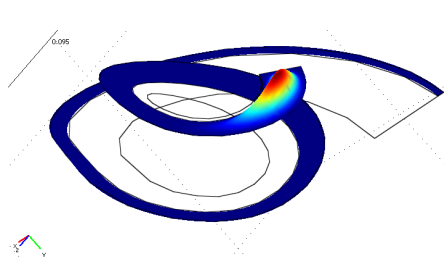
(a) Géométrie simplifiée créée sous CATIA, à partir des données fournies par le MEEI (voir figure 1.3). Dans ce modèle, la partition fixe est la base sur laquelle s'appuient les deux canaux (Scala vestibuli et Scala tympani).



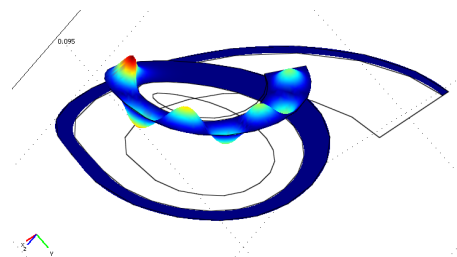
(b) La membrane basilaire est portée par la partition entre les deux canaux. La largeur de la membrane basilaire évolue linéairement de la base ( $\approx 0,15mm$ ) jusqu'à l'apex ( $\approx 0,95mm$ ).

FIGURE 2.8 – Géométrie enroulée 3D de la membrane basilaire.

brane varie de la base jusqu'à l'apex. Le matériau appliqué sur le modèle coque est isotrope et homogène. Le calcul des premiers modes structuraux (sans couplage fluide montrent une première esquisse de la tonotopie (voir figure 2.9). Les premiers modes propres de la structure de type coque isotrope définie avec des paramètres arbitraire montrent que la déformée dynamique à basse fréquence est proche de l'apex. Plus la fréquence des modes propres augmente plus la déformée est localisée proche de la base. Pour affiner le modèle,



(a) Premier mode de vibration.



(b) Septième mode de vibration.

FIGURE 2.9 – Modes de vibration pour un modèle de type « coque isotrope ».

la mise en place d'un repère tournant est nécessaire. Ce repère permettrait de définir un matériau orthotrope et inhomogène ou de définir des variations de l'épaisseur de la coque en fonction de la position sur une ligne suivant la médiane de la membrane basilaire. La création d'un repère tournant sur une géométrie régulière de type spirale serait envisageable mais cela n'est pas réalisable sur une géométrie obtenue à partir de mesures, trop irrégulière. De plus la comparaison avec les autres modèles ne possédant pas la même

géométrie serait difficile.

Plusieurs études ayant montré la faible influence de l'enroulement, il paraît peu pertinent de poursuivre ce modèle. Afin de réaliser un modèle plus facilement manipulable, une géométrie déroulée est mise en place.

### 2.2.2.2 Géométrie déroulée de la membrane basilaire

#### Comparaison avec des résultats expérimentaux à l'échelle de laboratoire

La géométrie déroulée de la membrane basilaire est constituée d'une plaque de largeur variable encastrée sur ses deux bords. Afin d'obtenir une validation du modèle, une comparaison avec des résultats expérimentaux est proposée. Le premier modèle est donc dimensionné de façon à pouvoir réaliser des tests expérimentaux en parallèle. L'expérience consiste en une plaque d'aluminium de largeur variable encastrée sur ses deux bords latéraux (voir figure 2.10). Une tension sinusoïdale pas-à-pas est appliquée en entrée du pot

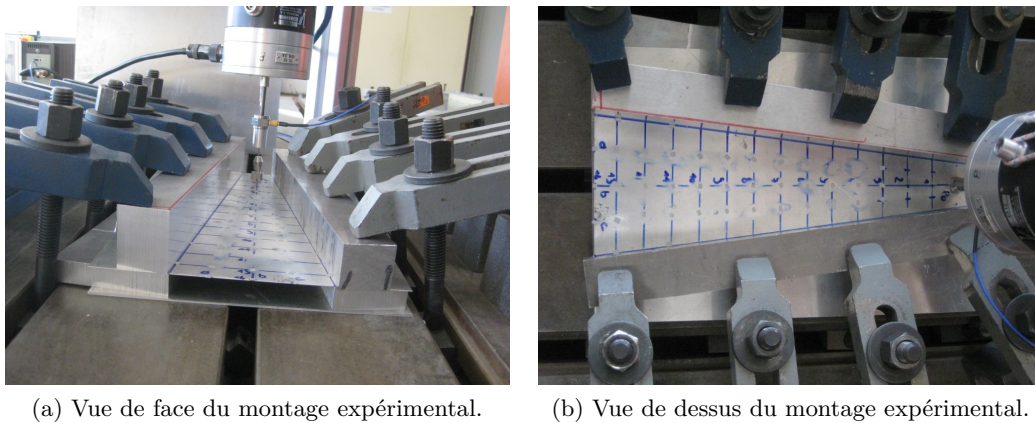


FIGURE 2.10 – Plaque de largeur variable encastrée sur ses deux bords. Un pot vibrant excite la plaque et la réponse est mesurée par un vibromètre laser.

vibrant. La force appliquée à la plaque est mesurée par une tête d'impédance et la réponse est obtenue par la mesure de la vitesse par un vibromètre laser sur un maillage couvrant la surface de la plaque. Les courbes de réponse en fréquence sont déterminées à partir de ces mesures. Le logiciel TestLab de LMS© permet de reconstituer les modes de vibrations de la structure à partir de ces mesures. Les premiers modes sont ainsi identifiés (voir figures 2.11c, 2.11a et 2.11e). Par ailleurs, une analyse modale est réalisée sur le modèle numérique par éléments finis sous le logiciel COMSOL Multiphysics©. Les résultats sont comparés pour trois modes (voir figure 2.11) La comparaison entre les résultats numériques et les résultats expérimentaux donne de bons résultats. Les fréquences propres sont relativement proches dans les deux approches. De même, la déformée est qualitativement la même dans l'expérience et le modèle par éléments finis. Cette comparaison permet de vérifier que le modèle par éléments finis d'une plaque de largeur variable donne des résultats cohérents avec des mesures expérimentales. Ce modèle est réadapté pour représenter la membrane basilaire avec des dimensions et des caractéristiques matériaux différentes.

#### Modèle appliqué à la cochlée

La géométrie déroulée (ou redressée) de la membrane basilaire est un prisme d'épaisseur 0,1 mm. Elle mesure 35 mm de long pour une largeur variant de 0,2 mm à 2 mm (voir

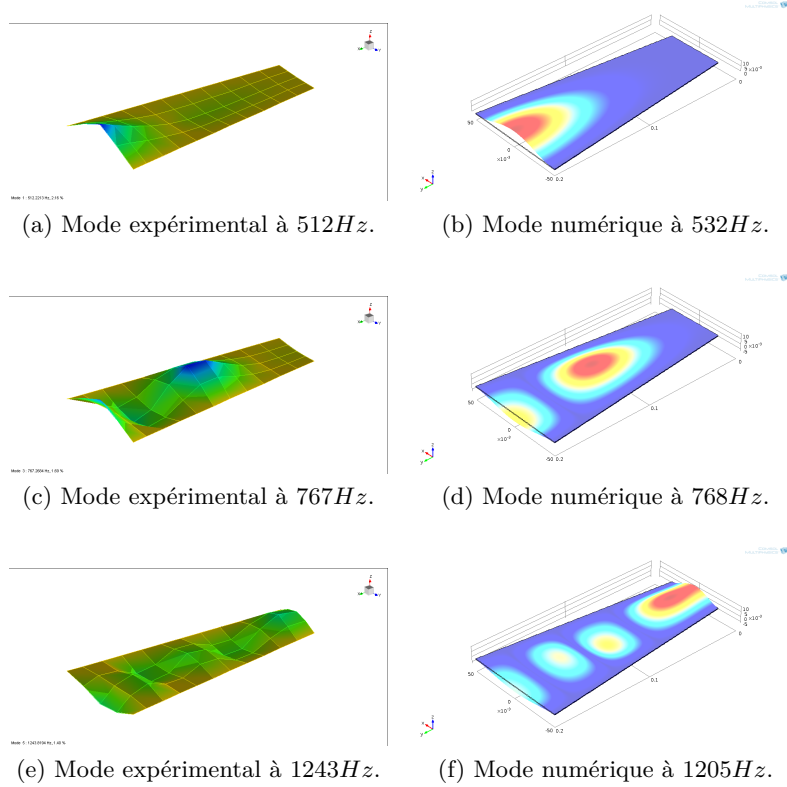


FIGURE 2.11 – Modes de vibration pour une plaque de largeur variable. Les résultats expérimentaux sont reconstruits par identification modale à partir des mesures sous LMS©. Les résultats numériques sont obtenus à l’aide du logiciel éléments finis COMSOL Multiphysics©.

figure 2.12a). La forme complexe de l’organe de Corti est représentée par un solide à la géométrie simple. Le domaine à définir est volumique, contrairement à la modélisation de type « coque » (voir section 2.2.2.1). Un modèle surfacique pourrait être utilisé mais dans l’optique d’une représentation fidèle de la cochlée, la représentation par un solide autorise la création de formes plus complexes. Des éléments de type tétraèdres sont utilisés car ils s’adaptent bien à tout type de géométrie. Cependant, le problème d’échelle se pose. Un modèle réaliste de la membrane basilaire supposerait une épaisseur plus fine. Cependant, un modèle par éléments finis ne peut accepter d’éléments plus gros que la dimension la plus petite de la géométrie. De plus, les éléments finis doivent avoir des dimensions équivalentes dans les trois dimensions pour ne pas subir de distorsion trop importante. La taille d’un élément dans l’épaisseur est donc de l’ordre de grandeur de la taille de l’élément dans la longueur. Le nombre d’éléments nécessaires est alors très élevé (plusieurs millions). Afin d’obtenir une raideur variant exponentiellement, le matériau appliqué au solide est inhomogène et orthotrope. L’orthotropie est limitée à un facteur deux entre le module de Young longitudinal  $E_z$  et les modules de Young transverses  $E_x$  et  $E_y$ . Un rapport plus important serait souhaitable mais les contraintes liées à la résolution numérique imposent une orthotropie relativement faible. Le module de Young du matériau est recalé en statique par rapport à un modèle de structure à réaction locale. Ku [68] réadapte à la cochlée humaine le modèle de Neely [100], défini pour une cochlée de chat. Les cochlées humaines sont assez peu représentées dans la littérature et c’est la raison du choix de ce modèle pour

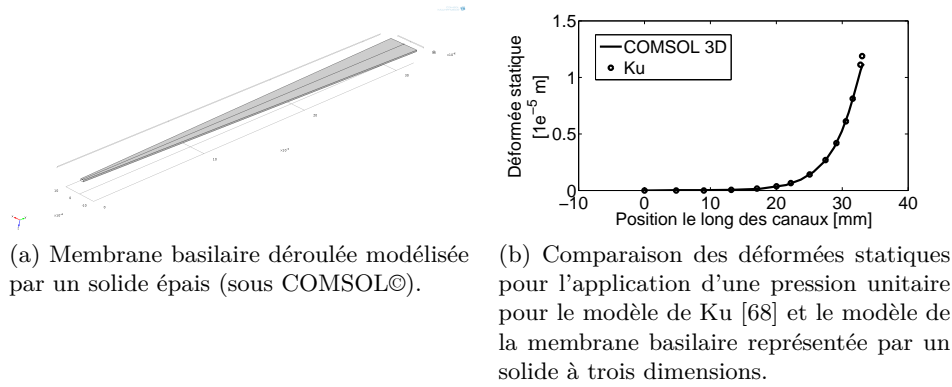


FIGURE 2.12 – Géométrie du solide représentant la membrane basilaire et déformées statiques à l'application d'une pression uniforme unitaire  $1 \text{ N.m}^{-2}$ .

recaler les paramètres du modèle par éléments finis. Le modèle de Ku possède deux degrés de liberté représentant la membrane tectoriaire et la membrane basilaire. Les paramètres de raideur et de masse de la membrane basilaire sont nettement supérieurs à ceux de la membrane tectoriaire. Les paramètres du modèle par éléments finis sont recalés par rapport à ceux du degré de liberté correspondant à la membrane basilaire.

Pour recaler la raideur, une pression statique uniforme est appliquée sur la face supérieure du solide. La déflexion de la ligne médiane est relevée et comparée à la déflexion obtenue avec le modèle de Ku. Les modules de Young sont ensuite recalés afin d'obtenir un écart minimum sur la déformée statique. Ce procédé de recalage n'est pas idéal mais il permet d'obtenir une raideur équivalente du même ordre de grandeur.

La masse volumique correspond à une masse linéique constante. La largeur de la membrane évolue linéairement donc la masse volumique du matériau diminue également linéairement. Un amortissement intrinsèque au matériau est introduit sous la forme d'un module de Young complexe  $E = E_0(1 + i\eta_s)$  [123], où  $\eta_s$  est le coefficient d'amortissement structural du matériau. Le calcul des modes propres de la membrane basilaire donne une première information sur le comportement de la structure. Les premiers modes correspondent à des modes de flexion transverse (un seul lobe dans le plan transverse) et la déformée est localisée près de l'apex. Pour les modes de fréquence plus haute, les lobes sont situés dans une zone plus proche de la base (voir figures 2.13a et 2.13b). Les réponses harmoniques (voir figures 2.13c et 2.13d) sont obtenues en appliquant une pression uniforme sur toute la surface supérieure du solide.

La réponse harmonique à haute fréquence (voir figure 2.13d) montre la superposition d'un grand nombre de modes, notamment des modes transverses d'ordre supérieur à 1. L'apparition de ces modes est due à un amortissement trop faible. L'absence de fluide est également un facteur important. L'inertie du fluide réduit l'amplitude de ces modes à haute fréquence.

### 2.2.2.3 Interaction fluide structure

L'amortissement intrinsèque de la structure est augmenté (à 10%) pour permettre une atténuation des modes transverses à haute fréquence. Dans le cadre d'une structure composée de tissu vivant, cette valeur ne paraît pas incohérente mais une recherche doit être conduite pour affiner cette valeur. L'interaction avec le fluide est un facteur important qu'il convient de prendre en compte. Une géométrie est construite autour du solide de la



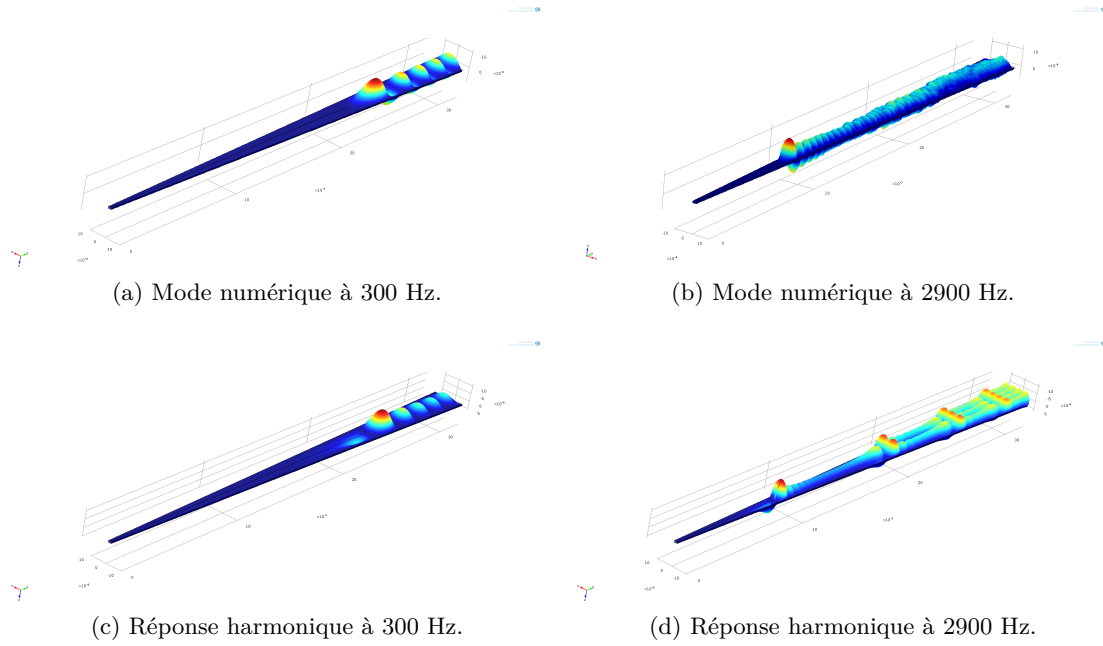


FIGURE 2.13 – Modes structuraux et réponses harmoniques d’une membrane basilaire équivalente définie par un solide en trois dimensions. Les résultats numériques sont obtenus à l’aide du logiciel éléments finis COMSOL Multiphysics®.

membrane basilaire. Un cylindre de diamètre 2 mm est partitionné par le solide de la membrane complété par des parois rigides (voir figure 2.14a). Le cylindre est fermé par une demi-sphère à l’une des extrémités (apex) et un plan à l’autre bout (base). Les canaux ainsi constitués sont remplis par un fluide similaire à de l’eau. Une pression d’excitation est imposée sur une surface ovale représentant le stapes. Sur le demi-cylindre inférieur, la pression imposée est nulle pour permettre une libre circulation d’un volume de fluide équivalent à celui déplacé par le stapes. Les conditions de paroi externe sont des conditions de mur rigide. Les conditions de paroi interne sont définies par deux relations réciproques : la pression du fluide est appliquée sur le solide et l’accélération du solide est appliquée au fluide. Le couplage fort ainsi réalisé nécessite de résoudre le problème de façon couplée et le solveur est réglé de façon à créer une seule matrice pour les 2 domaines. Les réponses

Paramètre	Symbole	Unité	Valeur
Masse volumique du fluide	$\rho_f$	$[kg/m^3]$	1000
Diamètre du canal	$H$	$[m]$	$1e^{-3}$
Masse volumique	$\rho_s(z)$	$[kg.m^{-3}]$	$4, 5/b(z)$
Amortissement structural intrinsèque	$\eta_s$	$[1]$	0, 1
Modules de Young transverses	$E_x, E_y$	$[MPa]$	$4, 5e^{-150z}$
Module de Young longitudinal	$E_z$	$[N.m^{-2}]$	$E_x(z)/2$
Largeur	$b(z)$	$[m]$	1
Longueur	$L$	$[m]$	$32e - 3$

TABLE 2.2 – Valeur des paramètres utilisés pour le modèle par éléments finis à 3 dimensions. Paramètres adaptés de [68].



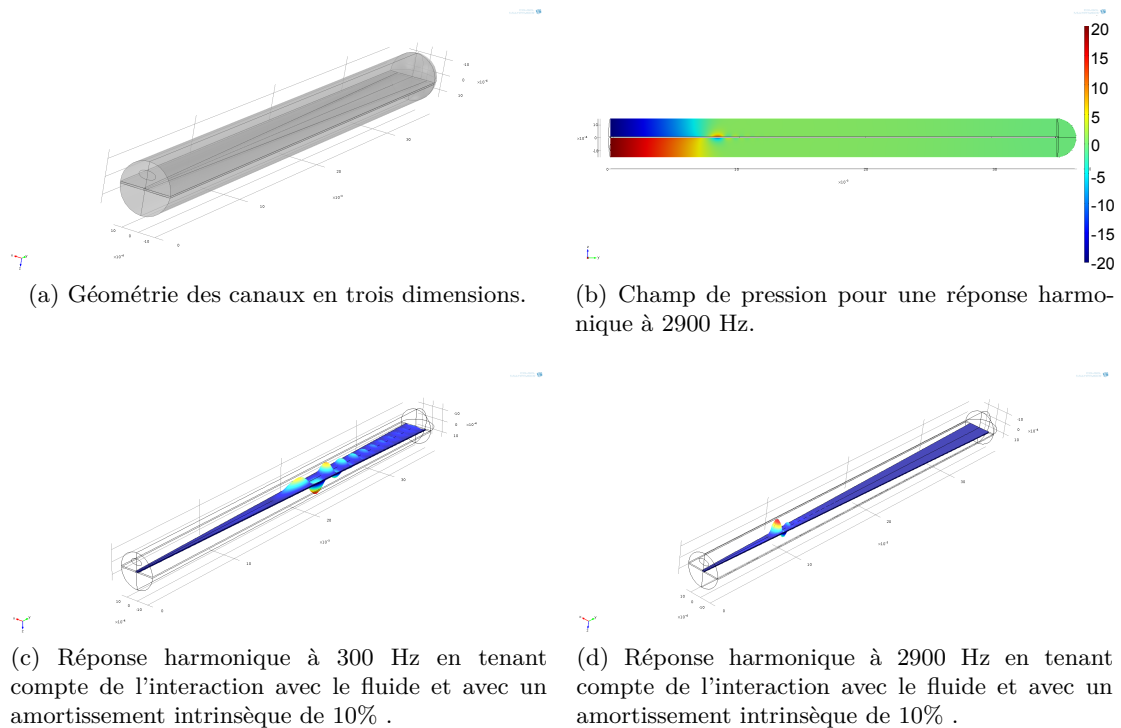


FIGURE 2.14 – Réponses harmoniques d’une membrane basilaire équivalente définie par un solide en trois dimensions immergée dans un fluide. Les résultats numériques sont obtenus à l’aide du logiciel éléments finis COMSOL Multiphysics©.

harmoniques (voir figures 2.14c et 2.14d) montrent une réponse de la structure en accord avec le modèle à deux dimensions développé précédemment. Les modes transverses sont nettement atténués par l’amortissement intrinsèque dans le solide. L’ajout du fluide ajoute un effet inertiel mais la masse volumique du fluide reste faible devant la masse volumique du solide et l’effet est peu visible. Le modèle est relancé avec une masse volumique de fluide dix fois supérieure. L’effet est observé lors du changement du paramètre de la masse volumique (voir figure 2.15). L’augmentation de la masse volumique du fluide décale la position du point de réponse maximale vers la base. Cela signifie que la plage de réponse de la cochlée est décalée vers les basses fréquences ce qui correspond bien à l’ajout d’un terme inertiel. La réponse de ce modèle est comparée avec la carte tracée par Greenwood [46]. Qualitativement, le comportement est similaire mais les résultats quantitatifs sont à relativiser (voir figure 2.16).

### 2.2.3 Bilan de la méthode des éléments finis

A travers les modèles à deux ou à trois dimensions présentés ici, le comportement d’un système couplé fluide structure ressemblant à la cochlée passive a pu être observé. La tonotopie relie la fréquence de vibration et le lieu de la vibration. La déformée de la structure révèle quelques particularités :

- La vibration couplée du fluide et de la structure génère une déformée présentant des lobes sur la structure. Les intervalles entre chaque lobe dépendent de la fréquence et également de la position le long de la structure.
- Les différents modèles structuraux ont chacun leurs propres caractéristiques : les modèles à deux dimensions présentent un comportement relativement simple à ca-

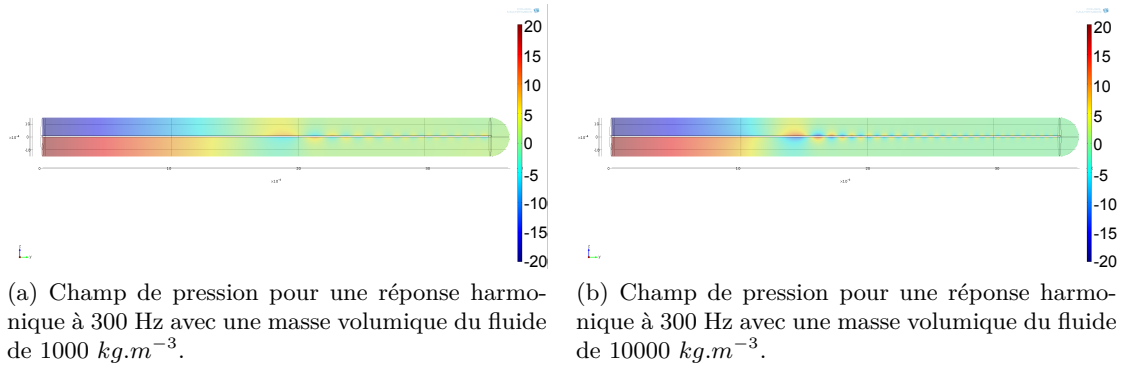


FIGURE 2.15 – Réponses harmoniques d’une membrane basilaire équivalente définie par un solide en trois dimensions immergée dans un fluide. La variation de la masse volumique du fluide modifie le point de réponse maximal.

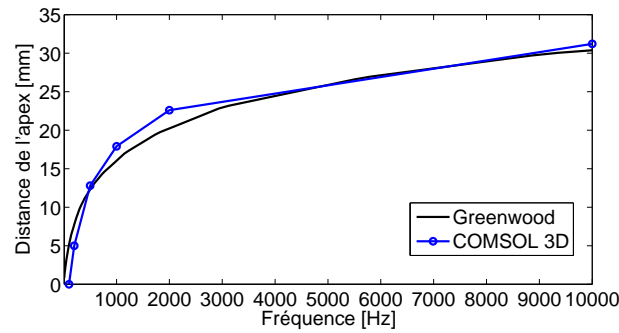


FIGURE 2.16 – Comparaison entre la tonotopie tracée par Greenwood à partir de mesures [46] et les résultats du modèle par éléments finis à trois dimensions.

racteriser. Un seul canal de fluide est représenté et la structure est définie sur une ligne. Le nombre de degrés de liberté est relativement limité et le temps de calcul reste raisonnable (de l’ordre de la seconde pour une fréquence).

- Les modèles à trois dimensions sont plus complet car ils peuvent intégrer des modes transverses dans leur réponse. La géométrie représentée est plus réaliste.
- L’amortissement de la structure joue un rôle important dans le comportement de la structure. Sur les modèles à deux dimensions, le terme d’amortissement est relativement élevé et provoque une chute du niveau de vibration après le point de vibration maximum. Sur le modèle à trois dimensions, l’amortissement réduit les vibrations des modes transverses supérieurs et fait ressortir le mode principal.
- Dans les deux cas, la tonotopie est reproduite et les paramètres du modèle (module de Young, amortissement intrinsèque, masse volumique) peuvent être recalés pour correspondre au mieux aux mesures expérimentales

Le dernier point soulève une question majeure. Les modèles éléments finis représentent au mieux la réalité puisqu’ils permettent d’ajuster la géométrie par rapport à une géométrie réaliste. L’ajustement des paramètres est un point délicat. En effet, pour représenter au mieux la réalité, la connaissance des paramètres physiques entrés dans le modèle doit être très bonne. Or, la cochlée est un organe difficile d’accès et les caractéristiques physiques des matériaux le constituant sont peu connues. Les données concernant chacun des composants

de l'organe de Corti existent, mais ici la membrane est représentée comme un solide. Une représentation réaliste de chacun des composants de l'organe de Corti par éléments finis est inenvisageable au vu de la taille de ces éléments par rapport à la taille globale de la cochlée.

## 2.3 Approche par un système Hamiltonien-à-ports

Dans cette section, un modèle basé sur le modèle à impédance variable présenté précédemment est développé. Les systèmes Hamiltonien-à-ports décrivent les systèmes multiphysiques avec un formalisme adapté à la commande de système. Les variables d'entrée et de sortie ont toujours la même dimension ce qui favorise le couplage en série.

### 2.3.1 Description du système global

#### 2.3.1.1 Modèle fluide macroscopique

Une représentation simplifiée de la cochlée est utilisée. La longueur d'onde acoustique à la fréquence maximale dans la cochlée humaine reste de plus de deux fois la longueur totale de la cochlée. Une hypothèse fréquemment reprise consiste à n'utiliser pour le fluide une description qu'à une seule dimension. Le champ de pression est supposé constant dans chacune des sections transverses. La totalité du champ fluide pourra donc être décrite par une variable  $p(z)$  dépendant uniquement de  $z$ . Un unique canal droit est rempli d'un fluide aux caractéristiques proches de l'eau. La section du canal au repos est constante, de hauteur  $H$  et de largeur  $b$ . Trois des parois latérales de ce conduit sont fixes et rigides. La quatrième paroi est mobile et représente la structure déformable de la membrane basilaire (voir figure 2.17). La longueur du conduit est appelée  $L$ . Ce modèle est similaire au modèle par éléments finis à deux dimensions décrit précédemment (voir section 2.2.1). A chacune

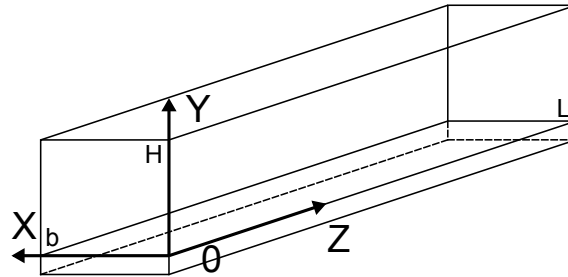


FIGURE 2.17 – Conduit rempli de fluide où se propage les ondes acoustiques.

des extrémités du conduit est appliquée une condition limite. A l'abscisse  $z = 0$ , la pression est imposée par une condition de Dirichlet :

$$p(z = 0, t) = p_s(t) \quad (2.17)$$

De même, la pression à l'abscisse  $z = L$  est imposée par une condition de Dirichlet homogène :

$$p(z = L, t) = 0 \quad (2.18)$$

La paroi basse du conduit se déplace verticalement et ce déplacement qui dépend du temps  $t$  et de la position  $z$  est nommé  $v(z, t)$ . L'aire d'une section à un instant donné dépend de ce déplacement. En utilisant les lois de conservation de la masse et de la conservation de la

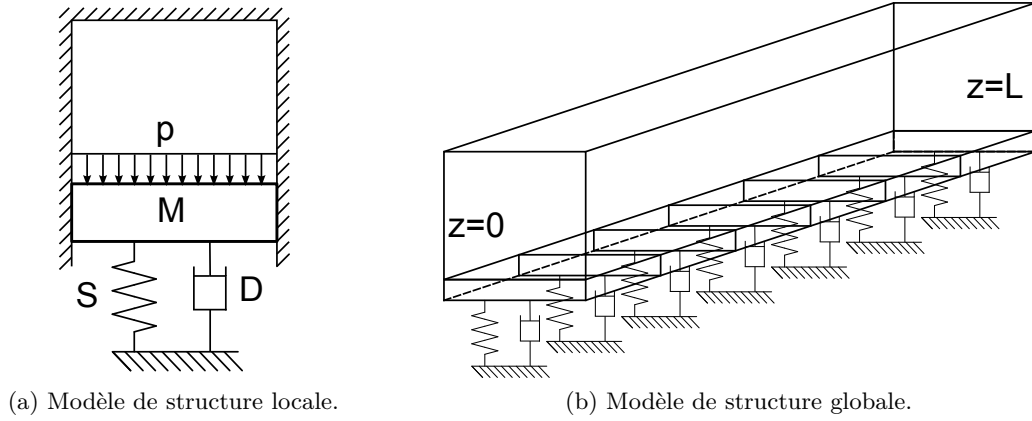


FIGURE 2.18 – Modèles structuraux utilisés pour décrire le système Hamiltonien-à-ports.

quantité de mouvement sur une section de longueur infinitésimale, il est possible d'obtenir la relation suivante [150] :

$$\frac{bH}{c^2} \frac{\partial^2 p(z, t)}{\partial t^2} - bH \frac{\partial^2 p(z, t)}{\partial z^2} = -\rho_f b \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} \quad (2.19)$$

où  $c$  est la vitesse du son dans le fluide. Cette relation est équivalente à l'équation d'Alembert (voir équation 2.1) pour un canal représenté par une seule dimension. Le champ de pression fluide doit respecter cette dernière équation ainsi que les deux conditions aux limites 2.17 et 2.18. Dans l'équation 2.19, un terme de couplage avec la paroi intervient. Un modèle doit donc être défini pour modéliser la paroi déformable.

### 2.3.1.2 Modèles structuraux

Un modèle de structure à réaction locale est utilisé pour représenter la membrane basilaire (voir figure 2.18b). Dans chaque section, une structure de type masse-ressort est considérée (voir figure 2.18a). Les paramètres de masse  $M(z)$ , de raideur  $S(z)$  et d'amortissement  $D(z)$  dépendent de la position  $z$  le long du guide d'onde (ce qui permet de retrouver la tonotopie). La pression du fluide est appliquée sur la masse rigide. L'équilibre de la masse  $M(z)$  s'exprime alors par l'équation :

$$M(z)\ddot{v}(z, t) + D(z)\dot{v}(z, t) + S(z)v(z, t) = -p(z) \quad (2.20)$$

où  $v$  est le déplacement vertical de la masse. Les grandeurs  $M(z)$ ,  $D(z)$  et  $S(z)$  sont des grandeurs linéiques.

### 2.3.2 Forme du Hamiltonien-à-ports

L'objectif du modèle Hamiltonien-à-ports est de décrire le comportement du système en utilisant des variables d'énergie qui sont de la même dimension pour chacune des physiques mises en jeu. Dans le cas étudié ici, le système considéré est décomposé en deux sous-systèmes : le fluide et la structure. La première étape consiste à discrétiser les sous-systèmes sur la longueur du conduit. Chacun des sous-systèmes est modélisé sous la forme d'un système Hamiltonien-à-ports. Enfin, les deux sous-systèmes sont couplés afin d'obtenir la réponse globale.

### 2.3.2.1 Modèle fluide

Le modèle fluide répond à l'équation 2.19 qui contient la dérivée seconde de la pression par rapport à la variable d'espace  $x$ . Un schéma aux différences finies est utilisé pour la discrétisation de cette équation. Le conduit est séparé en  $N$  sections. Pour chaque section  $i$ , l'équation (2.19) est discrétisée :

$$\frac{bH}{c^2} \frac{\partial^2 p_i}{\partial t^2} - bH \frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{\Delta_z^2} = -\rho_f b \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} \quad (2.21)$$

où  $\Delta_z$  est le pas spatial entre chaque section. La variable  $p_i$  représente la pression  $p(z_i, t)$  où  $z_i$  est l'abscisse de la section  $i$ . Le champ potentiel des vitesses  $\Phi$  est plus adapté à la description hamiltonienne. Il est introduit comme :

$$p = -\rho_f \dot{\Phi} \quad (2.22)$$

L'équation dynamique devient alors après une intégration temporelle :

$$\frac{\rho_f H}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t^2} - \rho_f H \frac{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}{\Delta_z^2} = \rho_f \frac{\partial v_i}{\partial t} \quad (2.23)$$

Les matrices suivantes sont définies :

$$M_f = \frac{\rho_f H}{c^2} I_N \quad (2.24)$$

avec  $I_N$  la matrice identité de taille  $(N \times N)$ . Le schéma des différences finies est également exprimés sous forme matricielle par la matrice  $K_f$  :

$$K_f = \frac{\rho_f H}{\Delta_x^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & & \\ -1 & 2 & -1 & \dots & & \\ 0 & -1 & 2 & \dots & & \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 2 & -1 & 0 \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Les premières et dernières lignes correspondent aux conditions de Dirichlet qui fixent la pression pour les sections  $x = 0$  et  $x = L$ . Les variables d'état choisies pour le modèle sous la forme hamiltonienne sont :

$$X_f = \begin{pmatrix} q_f \\ p_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi \\ M_f \dot{\Phi} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

L'hamiltonien du système est alors défini par :

$$H_f = \frac{1}{2} p_f^T M_f^{-1} p_f + \frac{1}{2} q_f^T K_f q_f \quad (2.27)$$

et son gradient par rapport aux variables d'état est :

$$\vec{\text{grad}}(H_f) = \begin{pmatrix} K_f q_f \\ M_f^{-1} p_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_f \Phi \\ \dot{\Phi} \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

L'équation dynamique du système peut alors se mettre sous la forme :

$$\dot{X}_f = [J_f] \overset{\rightarrow}{grad} (H_f) + \rho [\dot{w}_s] + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} p_s(t) \quad (2.29)$$

où la matrice  $J_f$  est définie par :

$$J_f = \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ -I_N & 0 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

### 2.3.2.2 Modèle structural local

La modélisation d'un système masse-ressort isolé est la première étape vers un modèle plus complet intégrant le couplage entre les sections. Le système de la figure (2.18a) est considéré pour une section  $i$  donnée à l'abscisse  $z_i$ . Dans un premier temps, l'amortissement  $D$  n'est pas pris en compte. Les variables utilisées sont définies dans un vecteur d'état :

$$X_{si} = \begin{pmatrix} q_{si} \\ p_{si} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_i \\ m_i \dot{v}_i \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Le Hamiltonien du système est alors exprimé à l'aide de ces variables :

$$H_{si} = \frac{k_i q_{si}^2}{2} + \frac{p_{si}^2}{2m_i} \quad (2.32)$$

Le gradient du Hamiltonien relativement aux variables choisies (voir équation 2.31) est déduit :

$$\overset{\rightarrow}{grad} (H_{si}) = \begin{pmatrix} k_i q_{si} \\ p_{si}/m_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_i v_i \\ \dot{v}_i \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

L'équilibre du système peut alors s'exprimer à l'aide des variables d'état :

$$\dot{X}_{si} = [J_{si}] \overset{\rightarrow}{grad} (H_{si}) \quad (2.34)$$

Pour le cas avec amortissement, l'équation matricielle devient :

$$\dot{X}_{si} = [J_{si} - R_{si}] \overset{\rightarrow}{grad} (H_{si}) \quad (2.35)$$

où les matrices  $J_{si}$  et  $R_{si}$  sont définies par :

$$J_{si} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

$$R_{si} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_i \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

En ajoutant les entrées et sortie, le système d'état pour la section  $i$  est :

$$\dot{X}_{si} = [J_{si} - R_{si}] \overrightarrow{\text{grad}} (H_{si}) + g_{si} u_{si} \quad (2.38)$$

$$\dot{Y}_{si} = g_{si}^T \overrightarrow{\text{grad}} (H_{si}) \quad (2.39)$$

Pour chaque section, la variable d'entrée  $u_{si}$  est la dérivée temporelle du champ potentiel  $\dot{\Phi}_i$ , proportionnelle à la pression  $p_i = -\rho_f \dot{\Phi}_i$  exercée par le fluide sur la masse  $m_i$ . La matrice  $g_{si}$  est donc définie par :

$$g_{si} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

### 2.3.3 Modèle structural global

La structure globale du guide comporte  $N$  sections. Chacune de ces sections est décrite par un système d'état local (voir section 2.3.2.2). Ces systèmes sont rassemblés en un seul système représentant le guide d'onde dans sa globalité. Les matrices globales  $M_s$  et  $K_s$  sont alors définies par :

$$M_s = [\text{diag}(m_i)] \quad (2.41)$$

$$K_s = [\text{diag}(k_i)] \quad (2.42)$$

Les variables d'état  $q_s$  et  $p_s$  sont alors introduites :

$$X_s = \begin{pmatrix} q_s \\ p_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [v_i] \\ M_s [\dot{v}_i] \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Le Hamiltonien du système global est :

$$H_s = \sum_{i=1}^{i=N} H_{si} = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{k_i q_{si}^2}{2} + \frac{p_{si}^2}{2m_i} \quad (2.44)$$

$$= \frac{1}{2} p_s^T M_s^{-1} p_s + \frac{1}{2} q_s^T K_s q_s \quad (2.45)$$

$$\dot{X}_s = [J_s - R_s] \overrightarrow{\text{grad}} (H_s) + g_s u_s \quad (2.46)$$

$$\dot{Y}_s = g_s^T \overrightarrow{\text{grad}} (H_s) \quad (2.47)$$

où les matrices sont assemblées de la façon suivante :

$$[J_s] = \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ -I_N & 0 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

$$[R_s] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{diag}(D_i) \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

$$g_s = \begin{pmatrix} 0_N \\ \rho I_N \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

$$u_s = [\dot{\Phi}_i] \quad (2.51)$$

### 2.3.4 Couplage

Le couplage entre le modèle fluide et le modèle structural peut s'effectuer grâce à la formulation hamiltonienne du problème :

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_f \\ \dot{X}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\Phi} \\ M_f \ddot{\Phi} \\ \dot{v} \\ M_s \ddot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_N & 0 & 0 \\ -I_N & 0 & 0 & -\rho I_N \\ 0 & 0 & 0 & I_N \\ 0 & \rho I_N & -I_N & -diag(D_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_f \Phi \\ \Phi \\ K_s v \\ \dot{v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} p_s(t) \quad (2.52)$$

### 2.3.5 Discussion

Le modèle Hamiltonien-à-ports propose une formulation utilisant des variables d'énergie. La structure mathématique du système matriciel obtenu permet un couplage simple des différents systèmes étudiés [136]. L'étude des lois de commande et de la stabilité du système est facilitée par cette formulation [135]. Le modèle décrit ici est relativement proche des modèles à impédance variable et les résultats ne sont pas présentés ici car ils n'apportent pas plus d'informations que les modèles par éléments finis précédents. La discrétisation du fluide sur une dimension est une approximation relativement importante puisque les modes de pression transverse sont ignorés et la pression est alors représentée par une fonction scalaire.

L'intérêt de cette méthode est de pouvoir intégrer d'autres physiques avec des variables qui ont les mêmes dimensions. Pour la modélisation d'un système actif, il est possible de convertir l'énergie chimique produite par la différence de potentiel entre les scala vestibuli et tympani en énergie électrique puis en énergie mécanique. L'organe de Corti peut être représenté comme un système couplant ces trois physiques et ajouté au modèle couplant la mécanique de la membrane basilaire et l'acoustique des canaux. La modélisation de la composante active de l'oreille interne n'est pas étudiée dans cette étude.

## 2.4 Vers un modèle asymptotique

Plusieurs modèles ont été présentés dans ce chapitre. Chacun des modèles a sa propre particularité et son propre intérêt dans le cadre de la modélisation de la cochlée. Cependant, ces modèles n'ont pas été retenus et approfondis pour différentes raisons.

Les modèles par éléments finis (voir section 2.2) parviennent à représenter la tonotopie et la physique de base de la cochlée. Cependant, le choix des paramètres joue un rôle très important dans la réponse obtenue et il est difficile d'obtenir des données empiriques fiables. Pour les modèles simples présentés, le calcul par éléments finis semble atteindre ses limites. Le nombre de degrés de libertés nécessaires pour représenter sur le même modèle les trois échelles de la cochlée est rédhibitoire. La discrétisation pose également un problème aux faibles longueurs d'onde. La taille du maillage doit être nettement inférieure à la longueur d'onde ce qui augmente le nombre de degrés de liberté lorsque l'onde approche la place caractéristique.

Le modèle Hamiltonien-à-ports, introduit à la section 2.3.2, utilise une représentation particulière utilisant les variables d'énergie. Ces systèmes permettent ainsi les couplages entre différents phénomènes physiques par une formulation transposable d'une physique à



l'autre. L'intérêt pour la modélisation de la cochlée est que plusieurs physiques sont facilement connectables : l'acoustique dans le fluide, la dynamique dans l'organe de Corti et également la chimie dans les fluides et dans les cellules cillées. La méthode des Hamiltoniens-à-ports permettrait de réaliser le couplage et de mesurer les variables d'entrée et de sortie à chaque niveau. Cependant, cette méthode pose encore une fois le problème de la discrétisation de l'équation de Helmholtz. La transmission de l'énergie d'un point à un autre sous la forme d'une onde peut se faire si la distance séparant les deux points est plus faible que la longueur d'onde.

La représentation de la vibration sous la forme d'une onde est l'idée qui permet de résoudre ces problèmes numériques. La longueur de la cochlée est nettement plus grande que ses dimensions transverses ce qui en fait un guide d'onde idéal. Les guides d'onde sont caractérisables par des modèles plus simple car une forme de la déformée dynamique est présupposée. Il n'est pas nécessaire de calculer la déformée point à point en prêtant attention à conserver un pas spatial inférieur à la longueur d'onde. Un nombre d'onde et un terme d'amplitude suffisent à caractériser la réponse dynamique. Reste alors à déterminer les caractéristiques de l'onde qui se propage. Pour le cas d'un milieu linéaire homogène isotrope, cette caractérisation est en général immédiate. Pour le cas d'un guide d'onde inhomogène ou non-linéaire, la caractérisation pose des difficultés supplémentaires [149]. La cochlée fait justement partie des guides d'onde inhomogènes car ses caractéristiques varient selon la direction de propagation. La méthode Wentzel-Kramers-Brillouin permet de résoudre cette difficulté. Cette méthode est explorée et utilisée dans le chapitre suivant.



## Chapitre 3

# Description d'un guide d'onde inhomogène.

Dans ce chapitre, une méthode asymptotique de représentation des vibrations est présentée. Cette méthode provient de la modélisation des plasmas dans des champs inhomogène. Elle est souvent utilisée pour la modélisation de la cochlée [11, 16, 28, 29, 52, 69, 87, 120, 125, 128, 129, 127, 132, 131, 130]. Elle est ici utilisée pour modéliser la propagation d'une onde le long d'un guide d'onde acoustico-structural inhomogène.

Dans un premier temps, les intérêts de la modélisation ondulatoire de la vibration sont illustrés à travers quelques exemples. La méthode Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) utilisant le principe du Lagrangien moyenné est exposée et appliquée à une guide d'onde constitué par une plaque de largeur variable immergée entre deux canaux. Une variante de cette méthode est ensuite proposée sur un modèle plus simple. La nouvelle méthode permet de prendre en compte l'influence des modes évanescents et ouvre la voie pour le couplage entre les modes propagatifs.

### 3.1 Approche ondulatoire

#### 3.1.1 Modélisation ondulatoire de la vibration

##### 3.1.1.1 Onde non dispersive sur une corde

De nombreux problèmes physiques sont décrits par des équations aux dérivées partielles [149]. Un exemple illustrant la propagation d'onde est la corde en flexion tendue par une force de traction  $T_z$  et soumise à une force linéique  $F(z, t)$ . Elle répond à l'équation [45] :

$$T_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + F(z, t) = \rho_s A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

où  $v(z, t)$  est la flèche dans la direction verticale de la corde,  $\rho_s$  est la masse volumique de la corde,  $A$  est l'aire de la section transverse de la corde et  $z$  est la direction longitudinale de la corde. Cette équation met en jeu la dérivée spatiale  $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$  et la dérivée temporelle  $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ , ce qui caractérise une onde. Dans ce cas, les dérivées sont au même ordre et l'onde est dite « non dispersive ». Dans le cas d'une corde homogène, la solution est recherchée sous la forme :

$$v(z, t) = v_z e^{-ikz} e^{i\omega t} \quad (3.2)$$

En remplaçant la flèche  $v$  par son expression, l'équation 3.1 devient :

$$-T_z k^2 v + F(z, t) = -\rho_s A \omega^2 v \quad (3.3)$$

Dans le cas de la vibration libre  $F(z, t) = 0$ , une relation apparaît entre la fréquence temporelle et la fréquence spatiale de la corde permettant de déterminer les modes de vibrations de la corde :

$$k^2 = \left( \frac{\rho_s A}{T_z} \right)^2 \omega^2 \quad (3.4)$$

Cette relation linéaire entre la fréquence  $\omega$  et le nombre d'onde  $k$  est appelée relation de dispersion. Dans le cas de la corde tendue, elle souligne le caractère non-dispersif de l'onde. La vitesse de groupe qui détermine la vitesse de propagation de l'énergie transportée par l'onde est alors constante :

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{T_z}{\rho_s A} = \text{constante} \quad (3.5)$$

Cela signifie que quelle que soit la fréquence, l'énergie se déplace à la même vitesse, ce qui est caractéristique d'une onde non-dispersive.

### 3.1.1.2 Onde dispersive sur une poutre

Dans le cas d'une poutre en flexion, l'équation dynamique fait intervenir la dérivée spatiale d'ordre 4 de la flèche :

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - \rho_s A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = F(z, t) \quad (3.6)$$

où  $A$  est l'aire de la section transversale de la poutre,  $E$  est le module de Young de la poutre et  $I$  est le moment d'inertie en flexion de la poutre. La déformée pour une poutre homogène peut être recherchée sous la forme 3.2. Pour une vibration harmonique sans excitation ( $F(z, t) = 0$ ), la relation de dispersion suivante est alors obtenue :

$$-\frac{EI}{\rho_s A} k^4 = \omega^2 \quad (3.7)$$

La vitesse de groupe dépend alors de la fréquence et l'onde est dite « dispersive » :

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = 2 \left( \frac{EI}{\rho_s A} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\omega} \quad (3.8)$$

Il y a quatre valeurs possibles pour le nombre d'onde  $k$  qui peuvent être représentées sur un graphique donnant la position dans le plan complexe des solutions en fonction de la fréquence temporelle  $\omega$  (voir figure 3.1). Dans un cas non dissipatifs, deux solutions sont imaginaires pures et les deux autres sont réelles.

### 3.1.1.3 Conditions limites et réflexion

La déformée dynamique de la poutre en flexion peut s'exprimer par une somme de quatres termes correspondant à chacune des solutions de l'équation eikonale 3.7 :

$$v(z) = \left( A_{p+} e^{-ikz} + A_{p-} e^{+ikz} + A_{e+} e^{-kz} + A_{e-} e^{+kz} \right) e^{i\omega t} \quad (3.9)$$

Les quatre termes de cette expression peuvent être décrits comme :

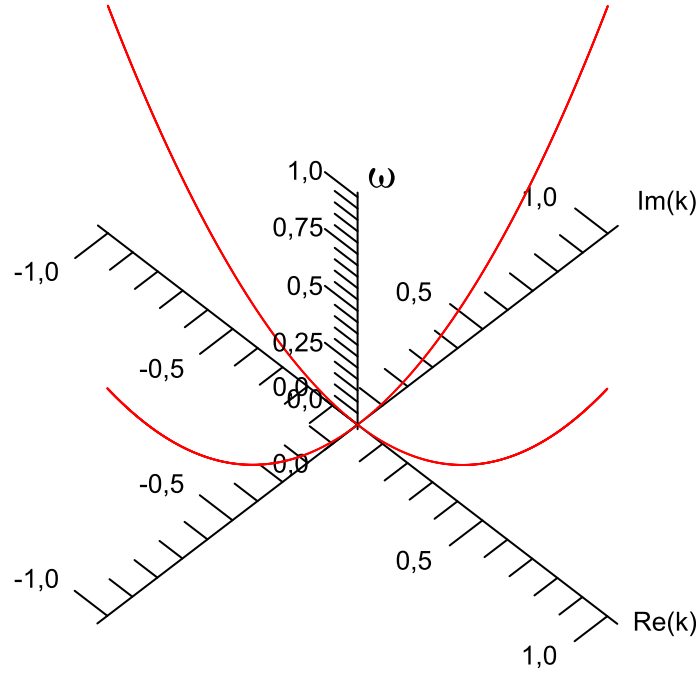


FIGURE 3.1 – Courbe de dispersion ( $k = f(\omega)$ ) dans le cas d'une poutre en flexion tracée sous le logiciel Maple©.

- une onde se propageant dans le sens positif des  $z$  correspondant au terme  $A_{p+}e^{-ikz}$ .
- une onde se propageant dans le sens négatif des  $z$  correspondant au terme  $A_{p-}e^{+ikz}$ .
- une onde évanescente dans le sens négatif des  $z$  correspondant au terme  $A_{e+}e^{-kz}$ .
- une onde évanescente dans le sens positif des  $z$  correspondant au terme  $A_{e-}e^{+kz}$ .

Les ondes propagatives voient leur amplitude rester constante avec le déplacement selon l'axe  $z$ . Au contraire, les ondes évanescentes voient leur amplitude décroître rapidement (de façon exponentielle) avec le déplacement selon l'axe  $z$ . Afin de déterminer les amplitudes de chacune des ondes, les conditions aux limites de la poutre doivent être définies. Plusieurs configurations existent [45] et les plus courantes sont choisies ici dans un but illustratif. L'une des extrémités de la poutre en  $z = 0$  est considérée en appui simple. Cette condition à la limite correspond à un déplacement nul et un moment de flexion nul.

$$v(z = 0) = 0 \quad (3.10)$$

$$M(z = 0) = 0 \quad (3.11)$$

Le moment de flexion peut être exprimé à partir de la dérivée seconde de la flèche par rapport à  $z$  :

$$M(z = 0) = EI \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (3.12)$$

Le terme  $A_{e-}e^{+kz}$  doit être nul car il donnerait une flèche tendant vers l'infini pour les  $z$  grandissant. Finalement, ces conditions donnent le système :

$$A_{p+} + A_{p-} + A_{e+} = 0 \quad (3.13)$$

$$-A_{p+} - A_{p-} + A_{e+} = 0 \quad (3.14)$$

La résolution de ce système conduit finalement à :

$$A_{p-} = -A_{p+} \quad (3.15)$$

$$A_{e+} = 0 \quad (3.16)$$

Les termes  $A_{p-}e^{+ikz}$  et  $A_{p+}e^{-ikz}$  peuvent être vus respectivement comme une onde incidente et une onde réfléchie. Avec la condition à la limite d'appui simple, le rapport de l'amplitude de l'onde incidente sur l'amplitude de l'onde réfléchie est de  $-1$ . Cela signifie que la totalité de l'onde incidente est réfléchie, avec une phase opposée. Une déformée sous la forme d'une onde stationnaire est observée :

$$v(z, t) = -2iA_{p+} \sin(kz) e^{i\omega t} \quad (3.17)$$

Cet exemple simple montre que les conditions limites jouent un rôle majeur dans l'expression de la déformée qui peut être représentée par une combinaison d'ondes propagatives et d'ondes stationnaires.

### 3.1.2 Plaque de section constante

L'intérêt de représenter la déformée sous la forme d'une onde apparait à chaque fois qu'une dérivée spatiale intervient, ce qui est fréquent. Les approches utilisant la base des fonctions sinusoïdales ou des fonctions hyperboliques pour représenter la déformée ne sont finalement qu'une mise en forme différente de cette approche puisque ces fonctions peuvent s'exprimer sous la forme d'une somme de fonctions exponentielles. L'exemple d'un guide d'onde structural de section constante est exposé dans cette section. Une plaque en flexion de longueur infinie, d'épaisseur  $h$  et de largeur  $b$  est encastree sur ses deux bords latéraux (voir figure 3.2). Le matériau de la plaque a une masse volumique  $\rho_s$ , un module de Young

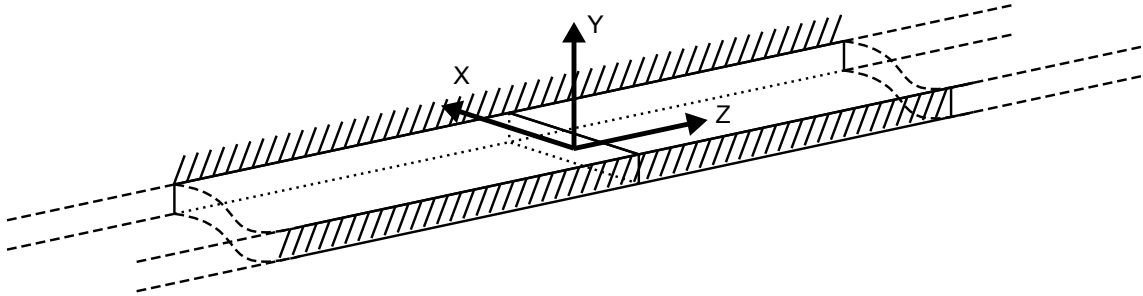


FIGURE 3.2 – Plaque en flexion de longueur infinie illustrant le principe de vibration sous forme d'onde.

$E$  et un coefficient de Poisson  $\nu$ . La plaque est supposée isotrope et sa rigidité en flexion est donnée par  $D_f = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ . L'équilibre dynamique de la plaque peut alors s'exprimer par l'équation :

$$\rho_s h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( D_f \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \left( D_f \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( D_f \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (3.18)$$

où la variable  $v$ , représente la flèche du plan moyen de la plaque et dépend de la position  $(x, z)$  et du temps  $t$ . Cette équation est appelée équation de Lagrange-Love. Elle est obtenue en réalisant l'équilibre d'une fibre élémentaire normale de la plaque.

Nom	Variable	Encastrement	Appui simple	Arête libre
Flèche	$v_x(x = \pm b/2)$	0	0	
Dérivée de la flèche	$\frac{\partial v_x}{\partial x}(x = \pm b/2)$	0		
Moment de flexion	$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}(x = \pm b/2)$		0	0
Effort tranchant	$\frac{\partial^3 v_x}{\partial x^3}(x = \pm b/2)$			0

TABLE 3.1 – Contraintes sur la flèche transverse pour les conditions aux limites d'encastrement et d'appui simple.

La structure est considérée comme infiniment longue dans la direction  $Z$  et relativement étroite dans la direction  $X$ . La déformation est supposée à variables séparées selon  $X$  et  $Z$ . Dans un régime linéaire harmonique, la déformation est supposée s'écrire sous la forme :

$$v(x, z, t) = v_x(x)v_z(z)e^{-ik_z z}e^{i\omega t} \quad (3.19)$$

### 3.1.2.1 Problème transverse

Les conditions aux limites imposées sur les deux bords latéraux ( $x = \pm b/2$ ) jouent un rôle important puisqu'elles imposent des conditions mathématiques sur la déformation transverse  $v_x(x)$ . Les conditions aux limites le plus souvent rencontrées sont des conditions d'encastrement ou des conditions d'appui simple. L'encastrement impose une flèche nulle et une dérivée de la flèche par rapport à  $x$  nulle. La condition de simple appui impose une flèche nulle et un moment de réaction nul. La condition de bord libre impose un moment de flexion nul et un effort tranchant nul le long de l'arête libre (voir table 3.1). L'effort tranchant et le moment de flexion peuvent être exprimés à partir des dérivées d'ordre 3 et d'ordre de la flèche. D'autres types de conditions aux limites sont détaillées dans [45]. Une solution transverse vérifiant les conditions aux limites d'encastrement est recherchée sous la forme du premier mode de flexion d'une poutre encastree à ces deux extrémités. Par symétrie, les fonctions sinus et sinus hyperbolique ne sont pas utilisées et seulement les deux conditions limites en  $+b/2$  seront appliquées :

$$v(x) = \alpha_1 \cos(\lambda_1 \frac{x}{b}) + \beta_1 \cosh(\lambda_m \frac{x}{b}) \quad (3.20)$$

Les conditions aux limites appliquées sur cette forme donnent :

$$\alpha_1 \cos(\frac{\lambda_1}{2}) + \beta_1 \cosh(\frac{\lambda_1}{2}) = 0 \quad (3.21)$$

$$-\lambda_1 \alpha_1 \sin(\frac{\lambda_1}{2}) + \lambda_1 \beta_1 \sinh(\frac{\lambda_1}{2}) = 0 \quad (3.22)$$

Pour que ce système ait une solution, le déterminant doit être nul :

$$\alpha_1 \cos(\frac{\lambda_1}{2}) \lambda_1 \beta_1 \sinh(\frac{\lambda_1}{2}) + \beta_1 \cosh(\frac{\lambda_1}{2}) \lambda_1 \alpha_1 \sin(\frac{\lambda_1}{2}) = 0 \quad (3.23)$$

$$\tan(\frac{\lambda_1}{2}) + \tanh(\frac{\lambda_1}{2}) = 0 \quad (3.24)$$

La dernière équation admet une infinité de solutions réelles qui peuvent être déterminées numériquement. La première de ces solutions est  $\lambda_1 = 4,73$ . Les coefficients  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  sont alors  $\alpha_1 = 0,8827$  et  $\beta_1 = 0,1173$ .

### 3.1.2.2 Problème longitudinal

La forme de la fonction de déplacement 3.19 est introduite dans l'équation de la dynamique des plaques (voir équation 3.18). Puis, cette équation est multipliée par la fonction de forme  $v_x(x)$  et intégrée sur la largeur de la section d'abscisse  $z$  afin de faire apparaître la fonction eikonale  $f(k_z, \omega)$  :

$$f(k_z, \omega) = -\omega^2 \rho_s h \int_{-b/2}^{b/2} v_x^2 dx + D_f \left[ k_z^4 \int_{-b/2}^{b/2} v_x^2 dx - 2k_z^2 \int_{-b/2}^{b/2} v_x \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} dx + \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\partial^4 v_x}{\partial x^4} v_x dx \right] \quad (3.25)$$

L'équilibre dynamique défini par la relation de dispersion 3.18 donne :

$$f(k_z, \omega) = 0 \quad (3.26)$$

Pour une fréquence  $\omega$  fixée, l'objectif est de déterminer les nombres d'onde  $k_z$  vérifiant cette relation. La relation de dispersion (voir équation 3.26) ou équation eikonale, relie le nombre d'onde  $k_z$  et la fréquence  $\omega$ . Pour une fonction transverse donnée, les intégrales  $\int_{-b/2}^{b/2} v_x^2 dx$ ,  $\int_{-b/2}^{b/2} v_x \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} dx$  et  $\int_{-b/2}^{b/2} \frac{\partial^4 v_x}{\partial x^4} v_x dx$  sont calculées et une équation du quatrième degré est finalement obtenue. Cette équation admet quatre solutions dans le plan complexe. L'étude de la résolution de cette équation est détaillée en annexe (voir Annexe B). En fonction des paramètres de la plaque considérée, deux fréquences particulières  $\omega_0$  et  $\omega_1$  peuvent être identifiées. La nature des solutions est alors caractérisée en fonction de la position de la fréquence  $\omega$  par rapport à ces deux fréquences particulières. La figure 3.3 montre les différents cas de figures possibles. Seul le dernier cas, lorsque  $\omega > \omega_1$ , présente des solutions réelles pures qui correspondent à des modes purement propagatifs.

Les quelques exemples présentés illustrent les avantages de la caractérisation de la déformée d'une structure sous la forme d'une onde :

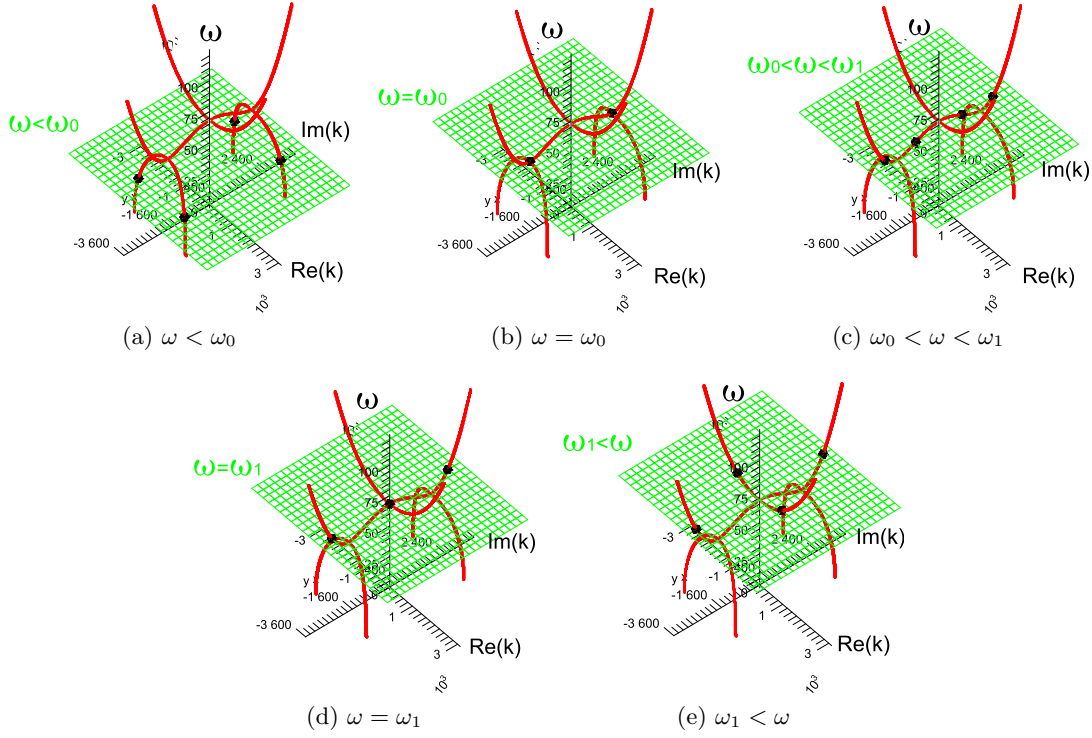
- Le calcul est simplifié. En introduisant une forme en  $e^{ikz}$ , les dérivées spatiales sont immédiates et la déformée rapidement calculée.
- La caractérisation par le nombre d'onde apporte des éléments d'analyse intéressants. Le nombre d'onde permet de calculer la longueur d'onde et donc la déformée. Le taux d'atténuation apporté par la partie complexe du nombre d'onde permet d'estimer ou d'observer l'amortissement dans la structure.
- D'autres caractéristiques peuvent être observées ou calculées (vitesse de groupe, interférence, coefficient de réflexion) et peuvent ainsi apporter des informations supplémentaires pour l'analyse.
- Les ondes transportent des informations qui peuvent aussi être utilisées pour d'autres applications (santé des structures, capteurs).

## 3.2 Hypothèses supplémentaires

### 3.2.1 Interaction fluide structure

Les cas présentés dans les sections précédentes utilisent des guides d'onde structuraux. Bien que la structure soit rarement dans le vide, l'interaction avec le fluide baignant la structure est peu souvent prise en compte. Pour le cas d'une structure se déplaçant à des vitesses importantes dans un fluide léger (un avion dans l'air), l'interaction avec le fluide devient très importante pour l'analyse vibratoire de la structure. En effet, le fluide



FIGURE 3.3 – Tracé de l'intersection du plan à  $\omega$  constant avec les courbes de dispersion.

devient force d'excitation de la structure et apportent de l'énergie. Dans certains cas, l'interaction fluide/structure peut provoquer des phénomènes instables. Le flottement est un phénomène de résonance provoquée par l'écoulement de l'air sur une aile d'avion. S'il est mal maîtrisé, le flottement peut entraîner la destruction de l'appareil. Dans une moindre mesure, un couplage fort peut intervenir et modifier l'écoulement du fluide. L'interaction avec un fluide lourd modifie le comportement de la structure par l'ajout d'inertie. Pour chaque déplacement de la structure, une masse de fluide doit être également déplacée.

Dans le cas présenté ici, le fluide considéré est un fluide lourd puisque ces caractéristiques sont proches de celles de l'eau. Le fluide est au repos donc sans écoulement mais se déplace autour d'une position d'équilibre. Plusieurs méthodes existent pour représenter les interactions fluide structure. La méthode choisie dans cette thèse est focalisée principalement sur la structure. Le champ de pression fluide supposé vérifie les conditions aux limites imposées par la structure.

### 3.2.2 Inhomogénéité

Les guides d'onde présentés précédemment sont de section constante. Dans le cas de la cochlée, les caractéristiques de la section varient en fonction de la position longitudinale, et cette variation constitue un élément essentiel puisque la tonotopie en découle. La résolution proposée ne peut pas s'appliquer immédiatement et une étude plus poussée doit être appliquée pour déterminer la façon de résoudre l'équation 3.18. La forme d'onde est toujours adaptée mais une simple résolution pour deux sections différentes à la même fréquence montre que le nombre d'onde n'est pas constant. Lorsque la variation des paramètres est suffisamment faible, certains termes peuvent être négligés par rapport à d'autres. La méthode Wentzel-Kramers-Brillouin part de ce principe pour établir des ap-

proximations nécessaires à la résolution. Deux variantes de la méthode sont développées. La première utilise un principe énergétique de conservation du Lagrangien pour déterminer les nombres d'onde et l'amplitude des ondes se propageant le long d'une plaque en flexion. La deuxième méthode développe le calcul asymptotique pour un cas plus simple. Une modification est apportée pour prendre en compte l'effet des modes évanescents dans le calcul.

### 3.3 Méthode Wentzel-Kramers-Brillouin

#### 3.3.1 Présentation du problème

Le guide d'onde représenté sur la figure 3.4 est un guide d'onde couplant fluide et structure dans un « box model ». Une plaque de largeur variable est immergée entre deux canaux de fluide. La hauteur des canaux  $H$  et l'épaisseur de la plaque sont supposés constants mais ils peuvent varier lentement dans le cadre général. La largeur des canaux est égale à celle de la plaque et varie linéairement dans le sens longitudinal. La longueur du guide  $L$  est supposée très grande devant toute les directions transverses. La variation de la largeur est supposée faible.

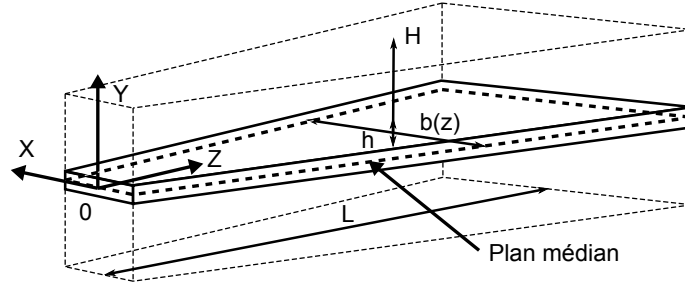


FIGURE 3.4 – Guide d'onde considéré pour l'application de la méthode WKB.

#### 3.3.2 Hypothèses

La section transverse du guide d'onde varie lentement. Les variables sont exprimées par un produit d'une enveloppe longitudinale et d'une forme modale transverse sous la forme  $Y_z(z)Y_T(x, y)e^{\theta(z)}e^{i\omega t}$ . La fonction  $\theta(z)$  est une fonction de phase dépendant du nombre d'onde :

$$k = i \frac{\partial \theta(z)}{\partial z} \quad (3.27)$$

La fonction  $Y_z(z)$  représente la fonction enveloppe déterminant l'amplitude de l'onde. La fonction  $Y_T(x, y)$  représente la déformée transverse. Du fait de la lente variation du guide d'onde, la relation suivante est supposée :

$$\frac{\partial Y_z(z)}{\partial z} \ll \frac{\partial \theta(z)}{\partial z} Y_z(z) \quad (3.28)$$

Cela revient à faire l'hypothèse que dans une longueur d'onde les caractéristiques du guide d'onde varient si peu qu'elles sont considérées comme constantes. Par conséquent, les dérivées suivant la direction longitudinale peuvent être remplacées par le produit  $\times \frac{\partial \theta(z)}{\partial z} = -ik(z)$ .

Dans le domaine fluide, le potentiel des vitesses  $\Phi(x, y, z, t)$  est choisi comme variable indépendante :

$$\Phi(x, y, z, t) = \phi(x, y)\phi_z(z)e^{\theta(z)}e^{i\omega t} \quad (3.29)$$

où  $\phi(x, y)$  est le champ du potentiel des vitesses dans le plan transverse et  $\phi_z(z)$  est la fonction enveloppe de l'amplitude de l'onde. Dans le domaine structural, la variable indépendante choisie est la flèche  $v(x, z, t)$  du plan médian ( $y = 0$ ) de la plaque :

$$v(x, z, t) = v_x(x)v_z(z)e^{\theta(z)}e^{i\omega t} \quad (3.30)$$

où  $v_x(x)$  est la déformée dans le plan transverse et  $v_z(z)$  est la fonction enveloppe de l'amplitude de l'onde. Cette fonction enveloppe dépend de  $z$ . La forme dans le plan transverse ne dépend que de  $x$  car l'hypothèse des plaques ramène le déplacement de la plaque au déplacement du plan médian. Le régime est supposé harmonique et l'équation de Helmholtz (voir équation 2.3) est appliquée au champ fluide. Le champ potentiel des vitesses 3.29, introduit dans l'équation de Helmholtz, doit vérifier l'équation suivante :

$$\Delta_T \phi(x, y) + (-k^2 + k_a^2) \phi(x, y) = 0 \quad (3.31)$$

où  $\Delta_T = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  est le Laplacien bidimensionnel dans le plan  $(x, y)$ . Les conditions limites sur les parois supérieure, inférieure et latérales sont des conditions de parois rigides (voir équation 2.8) :

$$\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \right\}_{\partial \Gamma_{pr}} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x = \pm \frac{b(z)}{2}) = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y}(y = \pm H) = 0 \end{array} \right\} \quad (3.32)$$

où  $\Gamma_{pr}$  est l'ensemble des surfaces latérales, supérieures et inférieures. Puisque la variation de largeur est faible, les parois latérales sont supposées parallèles à  $Z$ . L'interaction fluide structure est représentée par la relation d'Euler (voir équation 2.9) qui force la continuité du champ des vitesses entre le fluide et la structure :

$$-i\rho_f\omega v(x, z, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(y = 0) \quad (3.33)$$

L'épaisseur de la plaque  $h$  est négligée devant la hauteur des canaux  $H$ . En utilisant le terme  $\xi_j = \sqrt{k^2 - k_a^2 + \left(j\frac{\pi}{b(z)}\right)^2}$ , un champ potentiel vérifiant les conditions aux limites 3.32 et 3.33 est proposé comme une somme de modes orthogonaux :

$$\phi = \sum_{j=1}^{\infty} \cosh(\xi_j(|y| - 1)) \times \cos\left(j\frac{\pi}{b(z)}\left(x - \frac{b(z)}{2}\right)\right) \phi_{zj}(z) \quad (3.34)$$

où  $\phi_{zj}(z)$  est le terme enveloppe pour le mode acoustique  $j$ . Dans une approche classique en acoustique, la forme du champ potentiel dans la direction  $Y$  serait supposée par une somme de fonctions cosinus. Cette approche est développée par Cheng [19]. La comparaison avec la méthode WKB montre des résultats identiques pour la détermination des nombres d'onde. En utilisant les approximations 3.28 et 3.30, l'équation de l'équilibre dynamique de la plaque s'exprime par :

$$D_f v_z(z) \left( \frac{\partial^4 v_x(x)}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 v_x(x)}{\partial z^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 v_x(x)}{\partial x^4} \right) - \rho_s h(z) \omega^2 v_z(z) v_x(x) + p(x, 0, z, t) = 0 \quad (3.35)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$x = \pm b/2 \Rightarrow v_x(x) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial v_x(x)}{\partial x} = 0 \quad (3.36)$$

L'équation 3.35 est obtenue à partir de l'équation d'une plaque en flexion (voir équation 3.18) sur laquelle est appliquée la pression  $p(x, 0, z, t)$  du fluide. Une approche modale est proposée pour déterminer le déplacement structural transverse. Une somme de modes vérifiant les conditions aux limites latérales est supposée :

$$v_x(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \alpha_m \cos(\lambda_m \frac{x}{b}) + \beta_m \cosh(\lambda_m \frac{x}{b}) + \gamma_m \sin(\lambda_m \frac{x}{b}) + \delta_m \sinh(\lambda_m \frac{x}{b}) \quad (3.37)$$

Dans le cas présenté ici, seul le premier mode de flexion ( $m = 1$ ) est utilisé et les paramètres  $\alpha_1 = 0.8827$ ,  $\beta_1 = 0.1123$ ,  $\lambda_1 = 4.730$ ,  $\gamma_1 = 0$  and  $\delta_1 = 0$  sont introduits [121] pour que la forme propre vérifie les conditions aux limites d'encastrement 3.36 sur les bords en  $x = \pm b/2$ . La relation d'Euler 3.33 donne alors :

$$-i\rho_f \omega v_x(x) v_z(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \sinh(\xi_j H) \times \cos\left(j \frac{\pi}{b(z)} \left(x - \frac{b(z)}{2}\right)\right) \phi_{zj}(z) \quad (3.38)$$

En multipliant l'expression 3.38 par  $\cos(j \frac{\pi}{b(z)} (x - \frac{b(z)}{2}))$  et en intégrant le résultat sur la largeur de la plaque, l'orthogonalité des fonctions cosinus permet d'obtenir :

$$\phi_{zj}(z) = -i\rho_f \omega \frac{\int_{-b(z)/2}^{b(z)/2} \cos(j \frac{\pi}{b(z)} (x - \frac{b(z)}{2})) v_x(x) dx}{\int_{-b(z)/2}^{b(z)/2} \cos^2(j \frac{\pi}{b(z)} (x - \frac{b(z)}{2})) dz} \times \frac{1}{\xi_j \sinh(\xi_j H)} v_z(z) \quad (3.39)$$

Ce résultat permet d'établir une relation directe entre le champ potentiel des vitesses  $\Phi(x, y, z, t)$  et la flèche de la plaque  $V(x, z, t)$ . Toutes les variables du système peuvent être exprimées en fonction de deux inconnues  $k(z)$  et  $v_z(z)$ . L'objectif est maintenant de calculer ces deux variables.

### 3.3.3 Approche variationnelle pour résoudre la phase et l'amplitude

Whitham [149] propose une méthode permettant de résoudre les équations d'ondes en utilisant le principe variationnel appliqué au Lagrangien du système. Le Lagrangien d'un système a la dimension d'une énergie et peut se calculer en combinant les énergies cinétiques et les énergies potentielles du système considéré. Steele [131] a été l'un des premiers à utiliser cette méthode pour décrire la propagation d'ondes dans la cochlée.

La méthode considère le premier principe variationnel pour une onde sous la forme  $ae^{\theta^*}$  [149] :

$$\delta \int \int \mathcal{L}(-\frac{\partial \theta^*}{\partial t}, \frac{\partial \theta^*}{\partial z}, a), dt dz = 0 \quad (3.40)$$

où  $\mathcal{L}$  est le Lagrangien calculé sur la longueur d'une période spatiale,  $\theta^* = \theta + i\omega t$  est la phase de l'onde,  $a$  l'amplitude de l'onde. L'équation 3.40 équivaut à :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = 0 \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} \right) = 0 \quad (3.42)$$

Le nombre d'onde  $k(z)$  et l'amplitude de l'onde  $v_z(z)$  peuvent être calculés par cette méthode. Le Lagrangien moyenné est exprimé par l'intermédiaire de 3 termes : l'énergie cinétique de la plaque  $T_p$ , l'énergie potentiel élastique de la plaque  $E_p$  et l'énergie cinématique du fluide  $T_f$  :

$$\mathcal{L} = T_p - V_p + T_f \quad (3.43)$$

Dans le cadre d'un régime établi, ces trois termes sont moyennés sur une période. Les résultats sont repris de [104]. L'énergie cinétique d'une section de la plaque est :

$$T_p = \frac{1}{4} \rho_s h \omega^2 v_z^2(z) \int_{-b(z)/2}^{b(z)/2} v_x(x)^2 dx \quad (3.44)$$

L'énergie potentielle élastique est :

$$V_p = \frac{D_f}{4} \left[ \frac{\int_{-b/2}^{b/2} \left( \frac{\partial^2 v_x(x)}{\partial x^2} \right)^2 v_x(x) dx}{\int_{-b/2}^{b/2} v_x(x)^2 dx} + k^2 \frac{\int_{-b/2}^{b/2} \frac{\partial^2 v_x(x)}{\partial x^2} v_x(x) dx}{\int_{-b/2}^{b/2} v_x(x)^2 dx} + k^4 \right] v_z^2(z) \int_{-b/2}^{b/2} v_x(x)^2 dx \quad (3.45)$$

L'énergie cinétique du fluide est calculée par :

$$T_f = \frac{1}{2} \rho_f h_f \omega^2 v_z^2(z) \int_{-b(z)/2}^{b(z)/2} v_x(x)^2 dx \quad (3.46)$$

où  $h_f$  est une épaisseur équivalente de fluide calculée pour les deux canaux :

$$h_f = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_j \tanh(\xi_j H)} \frac{\left( \int_{-b(z)/2}^{b(z)/2} v_x(x) \cos\left(j \frac{\pi}{b(z)} \left(x - \frac{b(z)}{2}\right)\right) dx \right)^2}{\int_{-b(z)/2}^{b(z)/2} \cos^2\left(j \frac{\pi}{b(z)} \left(x - \frac{b(z)}{2}\right)\right) dx \int_{-b(z)/2}^{b(z)/2} v_x(x)^2 dx} \quad (3.47)$$

Cette variable à la dimension d'une longueur et correspond à la hauteur de fluide déplacée afin que le système couplé soit à l'équilibre dynamique. Cette définition est mise en évidence plus loin dans l'équation d'équilibre global de chaque section (voir équation 3.52). Finalement, le Lagrangien moyenné dans le temps est exprimé par :

$$\mathcal{L} = \left( \frac{1}{2} \rho_f \omega^2 h_f + \frac{1}{4} \rho_s \omega^2 h - \frac{D_f}{4} \left( I_1(z) + I_2(z) k^2 + k^4 \right) \right) v_z^2(z) \int_{-b(z)/2}^{b(z)/2} v^2(x) dx \quad (3.48)$$

avec les intégrales :

$$I_1(z) = \frac{\int_{-b/2}^{b/2} \left( \frac{\partial^2 v_x(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx}{\int_{-b/2}^{b/2} v_x(x)^2 dx} \quad (3.49)$$

$$I_2(z) = \frac{\int_{-b/2}^{b/2} \frac{\partial^2 v_x(x)}{\partial x^2} dx}{\int_{-b/2}^{b/2} v_x(x)^2 dx}$$

Le principe variationnel exprime l'invariance du Lagrangien par rapport à  $v_z(z)$  et  $\theta^*(z, t)$  :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_z} = 0 \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} = 0 \quad (3.51)$$

Pour chaque section transverse, les nombres d'onde  $k(z)$  sont solutions de l'équation eikonale 3.50 qui conduit à :

$$D_f \left( I_1(z) + I_2(z)k^2 + k^4 \right) - \rho_f \omega^2 h_f - \rho_s \omega^2 h = 0 \quad (3.52)$$

Puisque cette équation est paire, toute solution  $k$  admet également la solution  $-k$ . Cela signifie que chaque onde incidente peut coexister avec son double réfléchi. Dans le cas d'un régime périodique établi, l'équation de transport 3.51 donne :

$$\left( \frac{1}{2} \rho_f \omega^2 \frac{\partial h_f}{\partial k} - D_f \frac{\partial (I_1(z) + I_2(z)k^2 + k^4)}{\partial k} \right) v_z^2(z) \int_{-b(z)/2}^{b(z)/2} v_x^2(x) dx = C_z \quad (3.53)$$

où  $C_z$  est une constante. La définition de cette constante est réalisée en un point choisi arbitrairement. Les conditions aux limites du guide d'onde permettent de déterminer cette constante. L'équation de transport correspond à la conservation de l'énergie de l'onde. Elle peut également s'appliquer dans le cas de systèmes dissipatifs. Les nombres d'onde sont alors complexes.

L'équation eikonale est une équation transcendante et elle admet une infinité de solutions dans le plan complexe. L'étude des solutions [19] révèle qu'un seul nombre d'onde propagatif et son opposé sont solutions. Tous les autres nombres d'onde correspondent à des modes évanescents. Uniquement les deux modes propagatifs sont considérés dans un premier temps. La déformation de la plaque est supposée être une combinaison de ces deux modes :

$$v(x, z, t) = v_{zi}(z) v_x(x) e^{\theta(z)} e^{i\omega t} + v_{zr}(z) v_x(x) e^{-\theta(z)} e^{i\omega t} \quad (3.54)$$

La condition à la limite appliquée au guide d'onde en  $z = 0$  est un déplacement imposé  $v_0$  :

$$v_{zi0} + v_{zr0} = v_0 \quad (3.55)$$

où  $v_{zi0}$  et  $v_{zr0}$  sont respectivement les amplitudes des ondes incidentes et réfléchies à l'abscisse  $z = 0$ . A l'autre extrémité du guide d'onde, une condition de moment de flexion nul  $M = 0$  est imposée :

$$v_{zi}(L) e^{-i \int_0^L k(\chi) d\chi} - v_{zr}(L) e^{i \int_0^L k(\chi) d\chi} = -\frac{M}{D_f k^2} = 0 \quad (3.56)$$

En utilisant l'expression 3.53 et les deux conditions aux limites 3.55 et 3.56, les amplitudes des ondes incidentes et réfléchies sont calculées à chaque abscisse. Le rapport de l'amplitude de l'onde réfléchie sur l'amplitude de l'onde incidente définit un coefficient de réflexion  $R$  :

$$R = \frac{|v_{zr}(z)|}{|v_{zi}(z)|} = \left| e^{2 \int_z^L k(\chi) d\chi} \right| \quad (3.57)$$

### 3.3.4 Amortissement

Le modèle proposé jusque là ne prend pas en compte aucune forme de dissipation. La dissipation peut être présente dans le solide et dans le fluide. Afin de prendre en compte une dissipation dans le solide, un module de Young complexe  $E_c$  est utilisé à la place du module de Young  $E$  [97] :

$$E_c = E (1 + i\eta_s) \quad (3.58)$$

Paramètre	Symbole	Unité	Valeur
Abscisse	$z$	$[mm]$	$[0 - 375]$
Largeur	$b$	$[mm]$	$60 - 38 \times z/L$
Epaisseur	$h$	$[mm]$	1
Masse volumique du fluide	$\rho_f$	$[kg/m^3]$	1000
Masse volumique du solide	$\rho_s$	$[kg/m^3]$	2800
Hauteur des canaux	$H$	$[mm]$	20
Module de Young	$E$	$[MPa]$	72000
Coefficient de Poisson	$\nu$	[1]	0,3
Amortissement structural	$\eta_s$	[1]	0,005
Viscosité du fluide	$\mu_f$	$[Pa.s]$	0,001

TABLE 3.2 – Valeur des paramètres utilisés pour représenter un guide d’onde sous la forme d’une plaque de largeur variable.

où  $i$  est le nombre complexe et  $\eta_s$  est le coefficient d’amortissement structural du matériau. Ce coefficient est un paramètre difficilement caractérisable. Il est de l’ordre de  $5.10^{-3}$  pour les structures métalliques. Pour les tissus vivants, il est raisonnable de prendre une valeur plus élevée de ce coefficient.

La plus grande source de dissipation dans la cochlée est liée à la viscosité du fluide. Un modèle de couche limite visqueuse peut être développé [19, 78] à partir de l’équation de vorticité et permettre la prise en compte de la viscosité du fluide. Une correction est apportée en reprenant les résultats de Lim [78]. Le déplacement du fluide à la frontière est recalculé en tenant compte de la viscosité à la paroi. L’équation 3.38 devient alors :

$$-i\rho_f\omega v_x(x)v_z(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \sinh(\xi_j H) \times \cos\left(j \frac{\pi}{b(z)} \left(x - \frac{b(z)}{2}\right)\right) \phi_{zj} \left(1 + \frac{\xi_j}{\gamma_j \tanh(\xi_j H)}\right) \quad (3.59)$$

où  $\gamma_j$  est calculé par :

$$\gamma_j = \sqrt{\xi_j^2 - i\omega \frac{\rho_f}{\mu_f}} \quad (3.60)$$

où  $\mu_f$  est la viscosité dynamique du fluide.

### 3.3.5 Résultats

La méthode décrite est utilisable pour tous les guides d’onde dont la section varie lentement. La géométrie de type « box model » (voir figure 3.4) est choisie car elle correspond à une géométrie simplifiée de la cochlée. Les dimensions ont peu de points commun avec les dimensions de la cochlée car elles correspondent aux dimensions du banc d’essai construit à une échelle supérieure. La description de ce banc d’essai et le choix des paramètres sont expliqués dans le chapitre 5. Un autre type de guide d’onde sera également modélisé par cette méthode.

Les résultats présentés ici correspondent au modèle de type « box model » d’une plaque de largeur variable plongée entre deux canaux remplis de fluide. Les paramètres de la plaque et les dimensions géométriques sont rassemblés dans la table 3.2.

### 3.3.5.1 Nombre d'onde

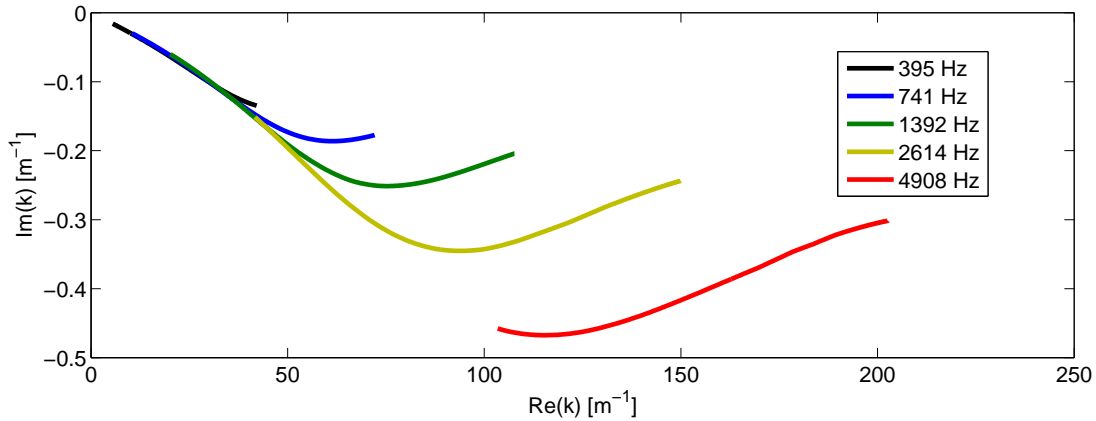


FIGURE 3.5 – Lieux des racines pour différentes fréquences pour le cas d'une plaque immergée et encastrée sur ces bords latéraux.

La première étape du calcul est la détermination du nombre d'onde. La résolution de l'équation eikonale 3.52 permet de trouver le nombre d'onde dans le plan complexe en fonction de la fréquence et de la position dans le guide d'onde (voir figure 3.5). Seul le premier nombre d'onde (en classant dans l'ordre des parties réelles) est recherché. Les lieux des racines sont tracés pour plusieurs fréquences. Le trajet dans le plan détermine le comportement de l'onde et notamment l'atténuation en fonction de la partie imaginaire du nombre d'onde. La partie réelle du nombre d'onde est nettement plus grande que la partie imaginaire, ce qui caractérise un mode propagatif. Le tracé de la partie réelle du nombre d'onde en fonction de la position  $z$  le long du guide d'onde permet de se rendre compte de plusieurs phénomènes :

- Trois zones sont distinguables pour chacune des fréquences.
- La première zone correspond à un nombre d'onde relativement faible (grande longueur d'onde). Les points du guide d'onde vibrent en phase.
- Dans la seconde zone, le nombre d'onde varie relativement rapidement. Cette zone correspond à la place caractéristique.
- Dans la troisième zone, le nombre d'onde est relativement élevé et les longueurs d'onde sont courtes.
- La position de la zone de transition dépend de la fréquence

### 3.3.5.2 Amplitude

Les amplitudes relatives pour plusieurs fréquences sont tracées en considérant uniquement une onde incidente (voir figure 3.7). La tonotopie apparaît clairement et les maxima sont localisés en différentes positions le long du guide d'onde en fonction de la fréquence (voir figure 3.7). La fonction enveloppe montre alors un profil possédant un unique pic de vibration maximal. Ce cas idéal correspond à un coefficient de réflexion nul. Dans un cas réel, l'onde incidente et l'onde réfléchie sont additionnées pour donner l'amplitude de la déformée. Le coefficient de réflexion  $R$  (voir équation 3.57) a une grande influence sur la forme de l'enveloppe de la réponse. Plus le coefficient de réflexion  $R$  augmente, plus l'amplitude des creux entre chaque pic secondaire augmente. Lorsque  $R$  tend vers l'unité, la déformée se rapproche d'un mode stationnaire où l'interférence entre l'onde incidente



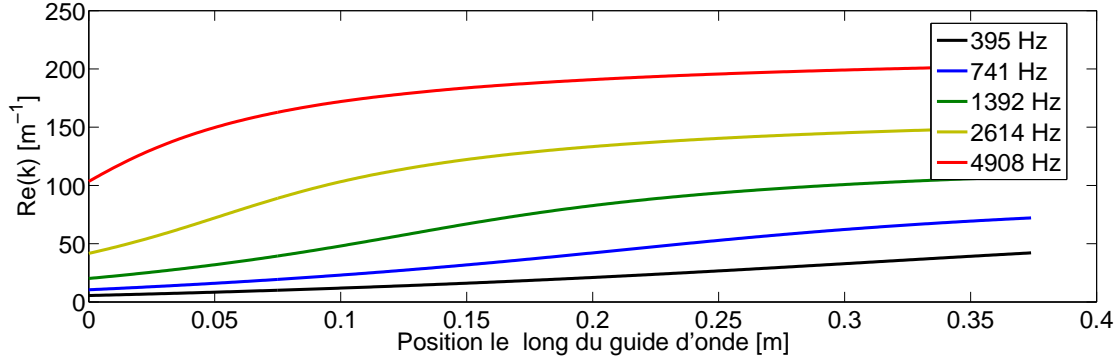


FIGURE 3.6 – Partie réelle du nombre d'onde en fonction de la position le long du guide d'onde, tracée pour plusieurs fréquences.

et l'onde réfléchie provoque la vibration en phase de tous les points. La variation du coefficient de réflexion est influencée par la valeur des paramètres de dissipation dans le solide et dans le fluide (voir 3.3.4). Pour différentes valeurs de viscosité du fluide, le coefficient de réflexion  $R$  est calculé :

$$\mu_f = 1e^{-3}[Pa.s] \Rightarrow R = 0,86 \quad (3.61)$$

$$\mu_f = 1e^{-2}[Pa.s] \Rightarrow R = 0,80 \quad (3.62)$$

$$\mu_f = 1e^{-1}[Pa.s] \Rightarrow R = 0,6 \quad (3.63)$$

Lorsque les amplitudes des deux ondes sont tracées sur le même graphique (voir figure 3.9), l'atténuation des ondes lors de leur propagation est observée. Lorsque le coefficient

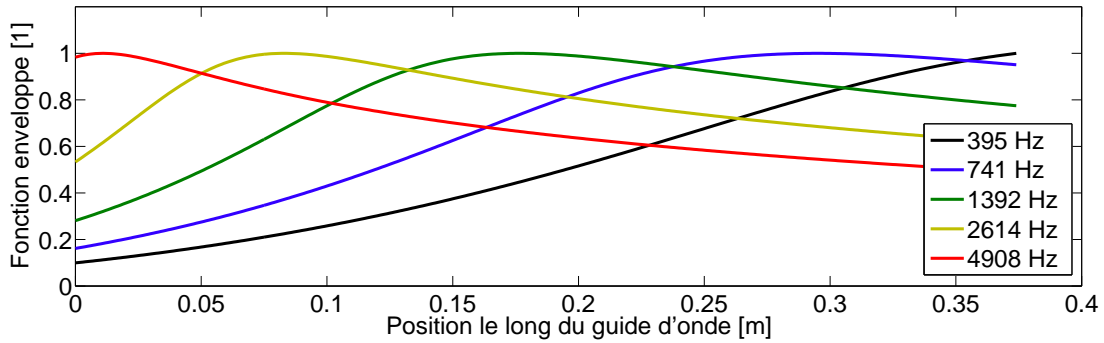


FIGURE 3.7 – Courbes enveloppes pour différentes fréquences.

de réflexion n'est pas nul, la présence de pics secondaires rend la localisation de la place caractéristique plus difficile. Un traitement du signal doit être réalisé afin de séparer les deux composantes et ensuite reconstituer l'enveloppe de l'onde incidente.

De la même façon, un tel comportement dans l'oreille générerait fortement la distinction fréquentielle et le cerveau aurait la sensation d'entendre plusieurs fréquences simultanément. Dans la cochlée, les dimensions du système sont telles que la viscosité du fluide bien que relativement faible, joue un rôle important. Le modèle est appliqué aux paramètres décrits par Lim [80]. Ces paramètres ne sont pas rappelés ici et la courbe a un but illustratif. L'amplitude de l'onde est tracée pour une fréquence de 10000 Hz sur la figure 3.10.

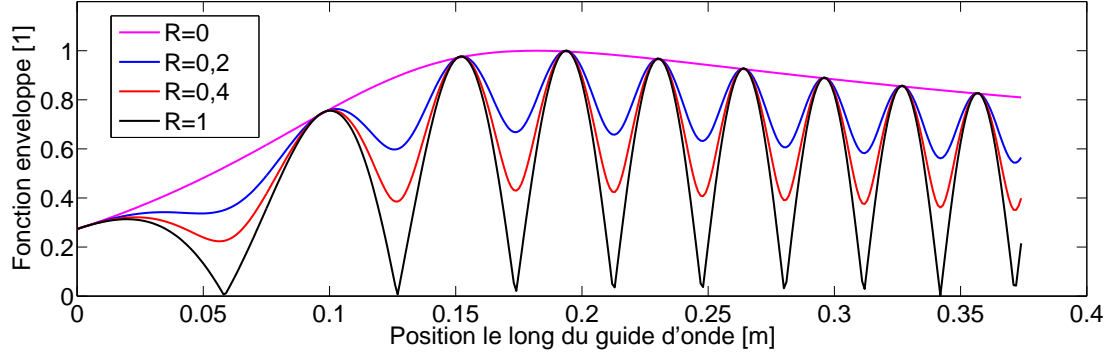


FIGURE 3.8 – Courbes d'amplitude en fonction du coefficient de réflexion.

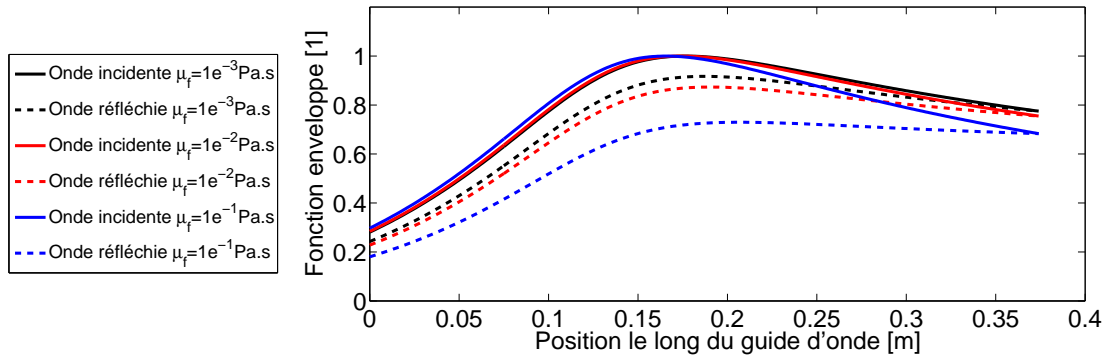


FIGURE 3.9 – Courbes d'amplitude normée des ondes incidentes et réfléchies en fonction de la position le long du guide d'onde.

Le mode transverse supposé correspond cette fois à la déformée d'une poutre appuyée à ces deux extrémités. Un modèle de plaque orthotropique est implémenté. Il apparait sur la figure 3.10 que la dissipation est suffisamment importante pour l'onde atteigne l'apex avec une amplitude quasiment nulle. L'onde réfléchie est alors faible ce qui permet une nette identification de la place caractéristique.

## 3.4 Méthode de projection sur les modes de propagation

### 3.4.1 Objectif

La méthode présentée dans cette section reprend dans un premier temps le développement réalisé par Holmes et Cole [52]. Le calcul est développé pour des cas de structures simples bidimensionnelles. Cette méthode réalise un développement asymptotique correspondant à l'hypothèse de guide d'onde lentement variable. Dans le cas d'une plaque en flexion, ce modèle permet de retrouver les résultats de la section précédente. La méthode pour obtenir ce résultat est différente et permet d'améliorer les résultats. L'objectif est ici de développer un modèle permettant de prendre en compte les modes évanescents dans le calcul de l'amplitude de l'onde. En premier lieu, un calcul asymptotique est réalisé afin d'obtenir les équations régissant la pression dans le fluide et le mouvement de la structure à différents ordre d'approximation. Ensuite, les équations à l'ordre 0 et à l'ordre 1

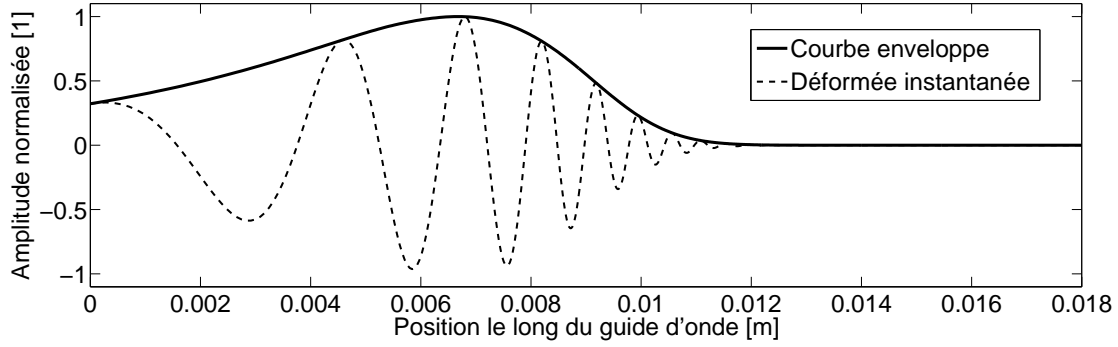


FIGURE 3.10 – Réponse de la membrane basilaire passive d'un chinchilla (rongeur mammifère). Les paramètres sont repris de [80].

sont projetées afin de déterminer les nombres d'onde et les amplitudes des ondes. Enfin, les conditions aux limites sont utilisées afin de reconstruire la réponse globale du guide d'onde.

### 3.4.2 Géométrie

La géométrie utilisée pour décrire le modèle est volontairement simplifiée. La géométrie est équivalente à celle de la section 2.2.1 et de la section 2.3. Un canal de section constante est fermé sur trois côtés par des parois rigides (voir figure 2.17). Les variables sont constante dans la largeur du guide mais il est possible d'étendre ce modèle à un modèle où le champ fluide et le déplacement dépendent de la coordonnées transverse  $x$ . Il faut pour cela utiliser une approche modale comme dans la section précédente (voir section 3.3).

### 3.4.3 Introduction des variables

La première étape est l'adimensionalisation des variables d'espace ( $y, z$ ) et de leurs dérivées élémentaires respectives ( $\partial y, \partial z$ ) :

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{z}{L} ; \bar{y} = \frac{y}{H} \\ \partial \bar{z} &= \frac{\partial z}{L} ; \partial \bar{y} = \frac{\partial y}{H}\end{aligned}\tag{3.64}$$

où  $L$  est la longueur du guide d'onde et  $H$  est la hauteur du canal. Le ratio  $\epsilon$  de ces deux échelles doit être très inférieur à 1 :

$$\epsilon = \frac{H}{L} \ll 1\tag{3.65}$$

Pour un régime harmonique à la fréquence  $\omega$ , chacune des variables indépendantes est recherchée sous la forme [98] :

$$Y(y, z, t) = Y_a(\bar{y}, \bar{z}, \epsilon) e^{-i\epsilon^{-1} \int_0^{\bar{z}} \bar{k}(s) ds} e^{i\omega t}\tag{3.66}$$

où le terme d'amplitude  $Y_a(\bar{y}, \bar{z}, \epsilon)$  est développé en tant que :

$$Y_a(\bar{y}, \bar{z}) = Y_{a0}(\bar{y}, \bar{z}, \epsilon) + \epsilon Y_{a1}(\bar{y}, \bar{z}, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\tag{3.67}$$

Afin de simplifier les notations, la fonction de phase est utilisée dans la suite :

$$\psi(\bar{z}, \epsilon) = -\epsilon^{-1} \int_0^{\bar{z}} \bar{k}(s) ds \quad (3.68)$$

où  $\bar{k}$  est le nombre d'onde adimensionné.

### 3.4.4 Modèle fluide

Pour modéliser le fluide, le champ de pression  $P(y, z, t)$  est choisi comme variable indépendante :

$$P(y, z, t) = p(\bar{y}, \bar{z}, \epsilon) e^{i\psi} e^{i\omega t} \quad (3.69)$$

où le terme  $p(\bar{y}, \bar{z}, \epsilon)$  est développé sous la forme :

$$p(\bar{y}, \bar{z}, \epsilon) = p_0(\bar{y}, \bar{z}) + \epsilon p_1(\bar{y}, \bar{z}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.70)$$

Le fluide est considéré comme incompressible. Aucune viscosité n'est prise en compte. Par conséquent, le champ de pression vérifie une équation de Laplace :

$$\Delta P = 0 \quad (3.71)$$

où l'opérateur  $\Delta$  correspond à  $\partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ . Avec les variables adimensionnalisées (3.64) et la forme du champ de pression (3.69), l'équation de Laplace (3.71) devient :

$$\left[ \bar{\Delta}_T p_0 - \bar{k}^2 p_0 \right] e^{i\psi} e^{i\omega t} + \epsilon \left[ \bar{\Delta}_T p_1 - \bar{k}^2 p_1 - 2i\bar{k}' p_0' - i\bar{k}' p_0 \right] e^{i\psi} e^{i\omega t} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0 \quad (3.72)$$

où  $\bar{\Delta}_T = \partial^2/\partial \bar{y}^2$  est l'opérateur Laplacien dans le plan transverse. Le signe ' représente la dérivation longitudinale  $\partial/\partial \bar{z}$ . Ici, le modèle est bidimensionnel car chaque variable est considérée comme constante dans la largeur du guide d'onde. Le modèle peut être étendu au cas où la largeur du guide d'onde varie [52].

Dans un premier temps, uniquement les conditions aux parois intérieures ( $\bar{y} = 0$ ) et extérieures ( $\bar{y} = \pm 1$ ) sont utilisées. Les parois latérales ( $x = \pm b/2$ ) n'interviennent pas dans le calcul puisque les variables sont constantes selon la direction  $x$ . Les conditions aux extrémités du guide d'onde seront utilisées plus tard dans le calcul.

Les parois extérieures sont considérées comme fixes et rigides. La vitesse normale du fluide sur ces parois est nulle ce qui entraîne la condition suivante pour la pression :

$$\frac{\partial P(\bar{y} = 1)}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (3.73)$$

La paroi intérieure formée par la structure déformable est en mouvement et la condition d'Euler relie la pression au déplacement de la structure  $V$  :

$$\frac{\partial P(\bar{y} = 0)}{\partial \bar{y}} = \rho_f \omega^2 H V \quad (3.74)$$

Dans les modèles structuraux, seul le déplacement vertical  $V(z, t)$  selon l'axe  $y$  est considéré. Dans le cadre de l'hypothèse (3.66), le déplacement est recherché sous la forme :

$$U(z, t) = u(\bar{z}, \epsilon) e^{i\psi} e^{i\omega t} \quad (3.75)$$

où  $v(\bar{z}, \epsilon)$  est développé selon :

$$v(\bar{z}, \epsilon) = v_0(\bar{z}) + \epsilon v_1(\bar{z}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.76)$$

Un champ de pression vérifiant l'équation de Laplace (3.72) et les conditions aux limites ci-dessus à l'ordre  $\epsilon^0$  est proposé sous la forme :

$$p_0(\bar{y}, \bar{z}) = -H v_0(\bar{z}) \Phi(\bar{y}, \bar{z}) \quad (3.77)$$

où le mode de pression  $\Phi$  est défini par :

$$\Phi(\bar{y}, \bar{z}) = \rho_f \omega^2 \frac{\cosh(\bar{k}(\bar{z})(\bar{y} - 1))}{\bar{k}(\bar{z}) \sinh(\bar{k}(\bar{z}))} \quad (3.78)$$

A partir de ce point, la description de la structure est nécessaire. Plusieurs types de structure sont étudiés dans les sections suivantes. Les types de structures étudiés correspondent à ceux étudiés à la section 2.2.1.

### 3.4.5 Structure à réaction locale

Le modèle structural le plus simple est la structure à réaction locale. Pour chaque section de longueur  $\delta z$ , une masse  $M(z)\delta z$  est relié au bâti par l'intermédiaire d'un ressort de raideur  $S(z)\delta z$  et d'un amortisseur visqueux de coefficient d'amortissement  $D(z)\delta z$ . La pression du fluide est également appliquée sur la paroi supérieure de la masse (voir figure 3.11b). Le terme de « réaction locale » provient du fait que les sections ne sont pas liées les unes aux autres par des éléments mécaniques. Le seul couplage longitudinal est produit par l'intermédiaire du fluide. Le déplacement  $v(z, t)$  de la masse rigide  $M(z)$  répond à l'équation de l'équilibre de la masse  $M$  :

$$M(z) \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial t^2} + D(z) \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} + S(z) v(z, t) = -b P(y = 0, z, t) \quad (3.79)$$

où la largeur  $b$  du guide d'onde est considérée constante. Pour la simplicité du calcul, le choix des paramètres  $M(z)$ ,  $D(z)$  et  $S(z)$  est fait de telle sorte que la largeur  $b$  soit unitaire. Les variables adimensionalisée sont utilisées et puisque le terme de phase est le même pour le champ de pression et pour le déplacement structural, l'équation (3.79) est simplifiée :

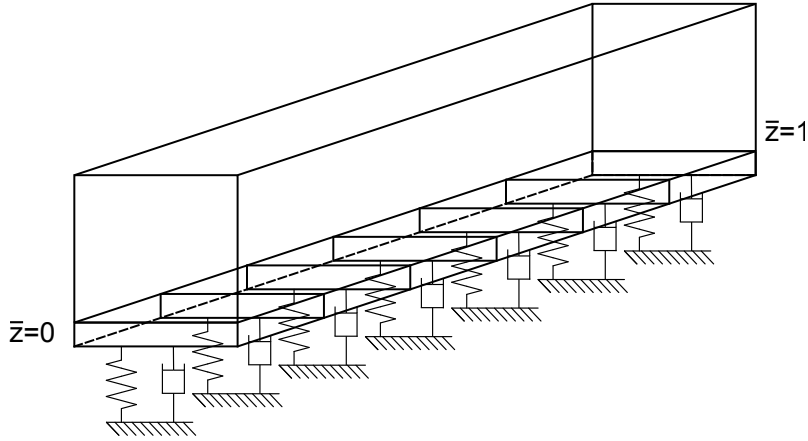
$$\left[ -\omega^2 M(\bar{z}) + i\omega D(\bar{z}) + S(\bar{z}) \right] v(\bar{z}, \epsilon) = -p(\bar{y} = 0, \bar{z}, \epsilon) \quad (3.80)$$

#### 3.4.5.1 Équation eikonale et lieu des racines

L'équation eikonale, également appelée relation de dispersion, est obtenue par l'équation (3.80) à l'ordre  $\epsilon^0$  et en utilisant le champ de pression (3.78) :

$$-\omega^2 M(\bar{z}) + i\omega D(\bar{z}) + S(\bar{z}) - \frac{\rho_f b \omega^2 H}{\bar{k}(\bar{z}) \tanh(\bar{k}(\bar{z}))} = 0 \quad (3.81)$$

En chaque position longitudinale  $\bar{z}$ , le nombre d'onde  $\bar{k}(\bar{z})$  est déterminé par cette relation. Le terme de tangente hyperbolique provient du champ de pression fluide et rend l'équation transcendante. Il existe donc un nombre infini de solutions dans le plan complexe. Il n'existe pas d'expression analytique de ces solutions et seule une recherche numérique permet de les trouver. Des études ont été menées afin d'optimiser la recherche et notamment



(a) Guide d'onde comprenant une structure à réaction locale.

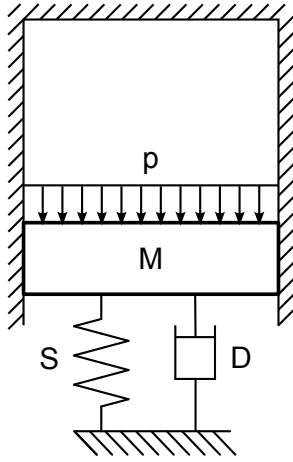
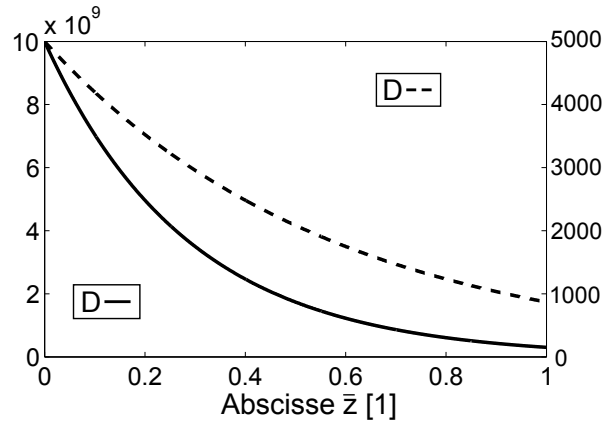
(b) Section de longueur  $\delta z$ .(c) Raideur  $S$  ( $N.m^{-2}$ ) et amortissement  $D$  ( $N.s.m^{-2}$ ) en fonction de la position  $\bar{z}$ .

FIGURE 3.11 – Modèle de structure à réaction locale.

de localiser les zones où se trouvent des racines dans le plan complexe [19]. Cheng utilise un modèle différent de la méthode WKB mais prouve que les racines trouvées sont identiques. En utilisant les paramètres décrits dans la table 3.3, les dix premiers lieux des racines sont résolus numériquement (voir figure 3.12). Les paramètres choisis correspondent à un modèle développé par Cheng. Les modes sont classés selon le rapport entre la partie imaginaire et la partie réelle du nombre d'onde. Plus ce rapport est grand, plus le mode est évanescent. Pour ce modèle, il n'existe qu'une seule racine dont la partie réelle est nettement supérieure à l'opposée de la partie imaginaire. Ce mode est dit « propagatif ». Les autres modes (évanescents) sont très fortement atténués. En effet, si le nombre d'onde est décomposé en sa partie réelle et sa partie imaginaire  $k = k_{re} - ik_{im}$ , le déplacement de la structure peut alors s'exprimer sous la forme :

$$v(z, t) = v(\bar{z}, \epsilon) e^{i\omega t} e^{i\epsilon^{-1} \int_0^{\bar{z}} \bar{k}_{re}(s) ds} e^{-\epsilon^{-1} \int_0^{\bar{z}} \bar{k}_{im}(s) ds} \quad (3.82)$$

Plus le terme  $k_{im}(s)$  est grand, plus l'amplitude de l'onde décroît au cours de sa propagation. Puisque l'équation eikonale est paire, à chacune des solutions correspond la solution opposée. Ces solutions ont la partie réelle négative et représentent les ondes se propageant en direction des  $z$  négatifs.

Paramètres	Symbole	Valeur
Masse volumique du fluide	$\rho_f$	1000 [kg/m <sup>3</sup> ]
Hauteur des canaux	$H$	1e <sup>-3</sup> [m]
Masse linéique	$M(\bar{z})$	1 [N.s <sup>2</sup> .m <sup>-2</sup> ]
Coefficient d'amortissement linéique	$D(\bar{z})$	0.05√ $MS$ [N.s.m <sup>-2</sup> ]
Raideur linéique	$S(\bar{z})$	1e <sup>10</sup> e <sup>(-100L<math>\bar{z}</math>)</sup> [N.m <sup>-2</sup> ]
Largeur	$b$	1 [m]

TABLE 3.3 – Valeur des paramètres utilisés pour la structure à réaction locale.

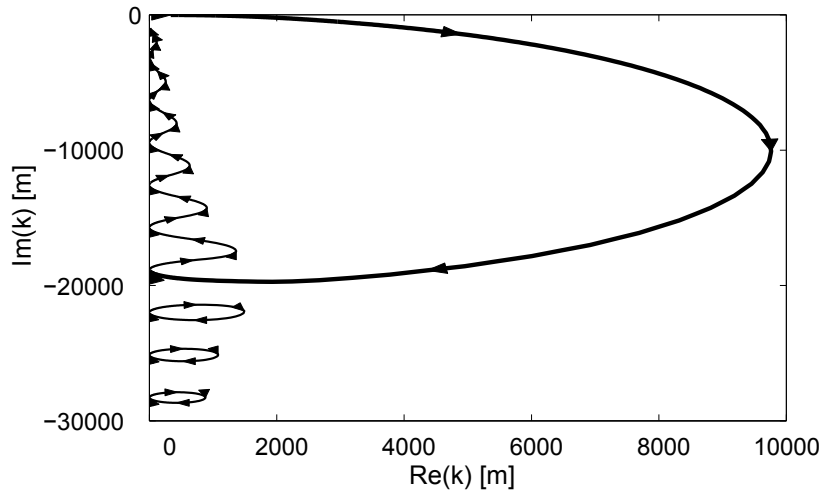


FIGURE 3.12 – Lieux (positions dans le plan complexe) des racines des dix premiers modes pour le modèle à réaction locale. La partie imaginaire des nombres d'onde est tracée en fonction de la partie réelle. Les flèches indiquent la direction de la base vers l'apex.

### 3.4.5.2 Amplitude

L'équation du fluide d'ordre  $\epsilon^1$  est considérée :

$$\bar{\Delta}_T p_1 - \bar{k}^2 p_1 - 2i\bar{k}p'_0 - i\bar{k}'p_0 = 0 \quad (3.83)$$

Cette équation est multipliée par la pression  $p_0$  et intégrée sur la section transverse :

$$\int_0^1 [\bar{\Delta}_T p_1 - \bar{k}^2 p_1] p_0 - [2i\bar{k}p'_0 + i\bar{k}'p_0] p_0 d\bar{y} = 0 \quad (3.84)$$

Le premier terme de cette équation peut être calculé par intégration par partie :

$$\int_0^1 [\bar{\Delta}_T p_1 - \bar{k}^2 p_1] p_0 d\bar{y} = \left[ \frac{\partial p_1}{\partial \bar{y}} p_0 - \frac{\partial p_0}{\partial \bar{y}} p_1 \right]_0^1 \quad (3.85)$$

Or, d'après les conditions aux limites 3.73 et 3.74, les variations de  $p$  aux frontières sont :

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_1(\bar{y} = 1, \bar{z})}{\partial \bar{y}} &= 0 \\ \frac{\partial p_1(\bar{y} = 0, \bar{z})}{\partial \bar{y}} &= \rho_f \omega^2 H v_1(\bar{z}) \\ \frac{\partial p_0(\bar{y} = 1, \bar{z})}{\partial \bar{y}} &= 0 \\ \frac{\partial p_0(\bar{y} = 0, \bar{z})}{\partial \bar{y}} &= \rho_f \omega^2 H v_0(\bar{z})\end{aligned}\tag{3.86}$$

L'équation d'équilibre de la structure (3.80) permet d'exprimer  $p_0(\bar{y} = 0)$  et  $p_1(\bar{y} = 0)$  :

$$\begin{aligned}p_0(\bar{y} = 0, \bar{z}) &= - \left[ -\omega^2 M(z) + i\omega D(\bar{z}) + S(\bar{z}) \right] v_0(\bar{z}) \\ p_1(\bar{y} = 0, \bar{z}) &= - \left[ -\omega^2 M(z) + i\omega D(\bar{z}) + S(\bar{z}) \right] v_1(\bar{z})\end{aligned}\tag{3.87}$$

Finalement, le terme (3.85) s'annule et l'équation (3.84) devient :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[ \bar{k} \int_0^1 p_0^2(\bar{y}, \bar{z}) \right] = 0\tag{3.88}$$

Cette équation correspond à la conservation de l'énergie le long du guide d'onde. Le couplage longitudinal et donc la transmission de l'énergie est réalisé uniquement par le fluide pour le cas de la structure à réaction locale. L'expression (3.88) signifie que le travail qui s'applique d'une section à la suivante reste constant le long du guide d'onde. Ce résultat est identique au résultat obtenu par Steele et Taber [130]. Ce résultat est valable dans le cas d'un système conservatif mais Steele et Taber ont montré qu'il était généralisable au cas d'un système dissipatif. L'expression est identique mais le nombre d'onde est alors complexe.

### 3.4.6 Structure de type membrane

La cochlée est parfois représentée sous la forme d'une structure de type membrane. L'équation dynamique d'une membrane plane soumise à une tension  $T$  dans sa direction longitudinale et à une pression  $p$  hors-plan est [45] :

$$T_z \left( \frac{\partial^2 v(y, z, t)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v(y, z, t)}{\partial y^2} \right) - p(y, z, t) = \rho_s \frac{\partial^2 v(y, z, t)}{\partial t^2}\tag{3.89}$$

Afin de simplifier le calcul, les bords latéraux de la membrane sont supposés libres et le terme en  $\partial^2/\partial x^2$  est nul. Le déplacement de la membrane est donc constant sur la largeur. En incluant une raideur et un amortissement visqueux, il est finalement possible de revenir à une équation du type :

$$-T_z \left( \frac{\partial^2 v(z, \epsilon)}{\partial z^2} \right) + \left[ -\omega^2 M(z) + i\omega D(z) + S(z) \right] v(\bar{z}, \epsilon) = -p(y, z, \epsilon)\tag{3.90}$$

Le modèle de structure à réaction locale est repris et complété par l'ajout d'un terme correspondant à la tension longitudinal de la membrane (voir figure 3.13). Le but est d'ici d'étudier l'influence de ce terme de tension longitudinale qui modifie fondamentalement le calcul. Les paramètres peuvent être adaptés afin de retrouver une correspondance avec une membrane appuyée.



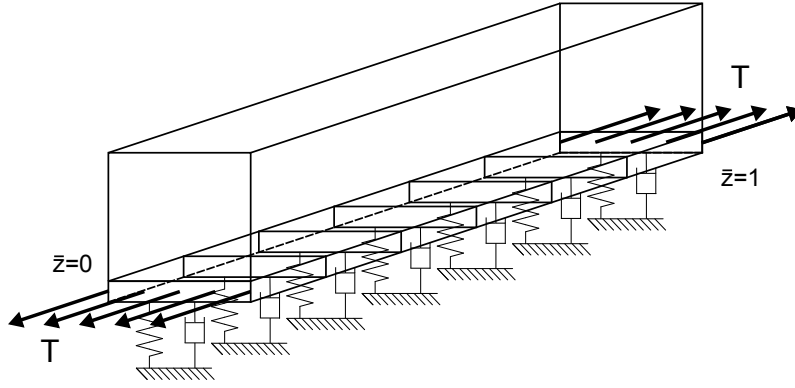


FIGURE 3.13 – Modèle de structure de type membrane.

### 3.4.6.1 Équation eikonale et lieu des racines

L'équation structurale à l'ordre  $\epsilon^0$  de l'équation (3.90) est exprimée :

$$\frac{T_z}{H^2} \bar{k}^2 v_0(\bar{z}) + \left[ -\omega^2 M(\bar{z}) + i\omega D(\bar{z}) + S(\bar{z}) \right] v_0(\bar{z}) = -p_0(\bar{y}, \bar{z}) \quad (3.91)$$

En utilisant l'hypothèse (3.77) pour le champ de pression  $p_0$ , l'équation eikonale est obtenue :

$$\frac{T_z}{H^2} \bar{k}^2 - \omega^2 M(\bar{z}) + i\omega D(\bar{z}) + S(\bar{z}) - \frac{\rho_f b \omega^2 H}{\bar{k}(\bar{z}) \tanh(\bar{k}(\bar{z}))} = 0 \quad (3.92)$$

L'équation structurale à l'ordre  $\epsilon^1$  est :

$$\left[ \frac{T_z}{H^2} \bar{k}^2 - \omega^2 M(\bar{z}) + i\omega D(\bar{z}) + S(\bar{z}) \right] v_1 + i \frac{T_z}{H^2} \left[ 2\bar{k}v'_0 + \bar{k}'v_0 \right] = -p_1(\bar{y} = 0) \quad (3.93)$$

Comme pour le cas de la structure à réaction locale, l'équation eikonale est résolue numériquement. Les solutions sont légèrement différentes puisqu'un terme en  $\bar{k}^2$  est apparu. A noter que ce terme est paire et les solutions sont toujours doubles (ondes incidentes et réfléchies). Les lieux des racines sont tracés pour les dix premiers modes et pour une valeur de la tension  $T_z = 1 [N.m^{-1}]$ . La principale différence avec le cas de la structure à réaction locale est le lieu des racines du premier mode propagatif. Après la place caractéristique, la partie réelle du nombre d'onde continue de croître tandis que la partie imaginaire décroît. Cela signifie que l'onde poursuit sa propagation contrairement au cas de la structure à réaction locale où l'onde était fortement atténuée après la place caractéristique. Le couplage mécanique longitudinal favorise la propagation de l'onde jusqu'à l'apex et sa réflexion.

### 3.4.6.2 Amplitude

L'équation du fluide à l'ordre  $\epsilon^1$  (3.84) est utilisée afin de déterminer l'amplitude de l'onde. Le calcul du terme (3.85) utilise les conditions aux limites (3.86). Les conditions (3.87) sont désormais modifiées par le terme de membrane :

$$\begin{aligned} p_0(\bar{y} = 0, \bar{z}) &= - \left[ \frac{T_z}{H^2} \bar{k}^2 - \omega^2 M(\bar{z}) + i\omega D(\bar{z}) + S(\bar{z}) \right] v_0(\bar{z}) \\ p_1(\bar{y} = 0, \bar{z}) &= - \left[ \frac{T_z}{H^2} \bar{k}^2 - \omega^2 M(\bar{z}) + i\omega D(\bar{z}) + S(\bar{z}) \right] v_1(\bar{z}) - i \frac{T_z}{H^2} \left[ 2\bar{k}v'_0 + \bar{k}'v_0 \right] \end{aligned} \quad (3.94)$$

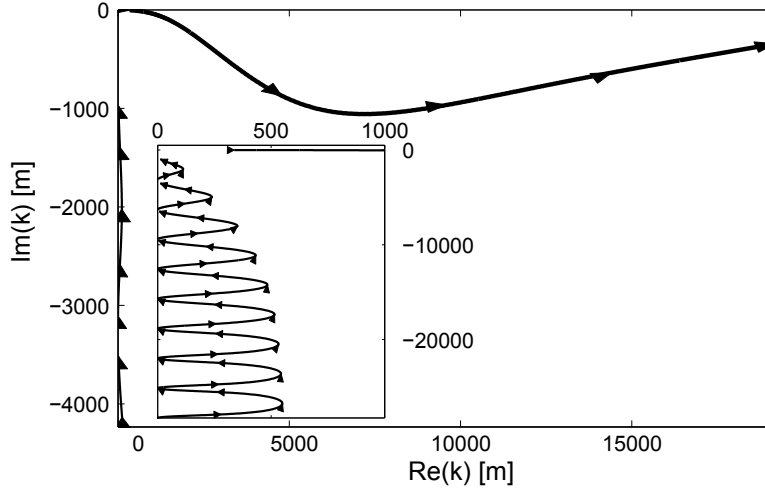


FIGURE 3.14 – Lieux des racines des dix premiers modes pour le modèle de type membrane. La partie imaginaire des nombres d'onde est tracée en fonction de la partie réelle. Les flèches indiquent la direction de la base vers l'apex.

L'équation (3.84) devient donc finalement :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[ \bar{k} \int_0^1 p_0^2 d\bar{y} + \frac{\rho_f \omega^2 T_z}{H} \bar{k} v_0^2 \right] = 0 \quad (3.95)$$

Cette expression correspond à la conservation de l'énergie transmise longitudinalement d'une section à l'autre par l'intermédiaire du fluide et par l'intermédiaire de la membrane.

### 3.4.7 Structure de type poutre

Les structure de type poutre présentent également un fort intérêt car elles peuvent être ensuite adaptés au cas de la plaque en flexion. Pour la modélisation de la cochlée, le modèle plaque paraît relativement peu adaptée car le coefficient d'orthotropie de la membrane basilaire est très faible. Cependant, ce modèle est adapté au calcul de structure artificielle où des matériaux isotropes (ou peu orthotropes) sont utilisés. Afin de simplifier le calcul, le cas d'une plaque dont les bords latéraux sont libres est considéré. Ainsi toute la section de la plaque à une abscisse donnée se déplace d'un mouvement de corps rigide, la structure est équivalente à une poutre. La rigidité flexural de la poutre est appelée  $D_f$  et l'équation dynamique est [45] :

$$D_f \left( \frac{\partial^4 v(y, z, t)}{\partial z^4} \right) + \rho_s \frac{\partial^2 v(y, z, t)}{\partial t^2} = -p(y = 0, z, t) \quad (3.96)$$

Afin de comparer aux calculs précédents, le modèle utilisé reprend la structure à réaction locale et ajoute le terme lié à la raideur en flexion. Ce modèle s'apparente dans ce cas à un modèle de poutre reposant sur une fondation élastique :

$$D_f \left( \frac{\partial^4 v(z, \epsilon)}{\partial z^4} \right) + \left[ -\omega^2 M(z) + i\omega D(z) + S(z) \right] v(\bar{z}, \epsilon) = -p(y, z, \epsilon) \quad (3.97)$$

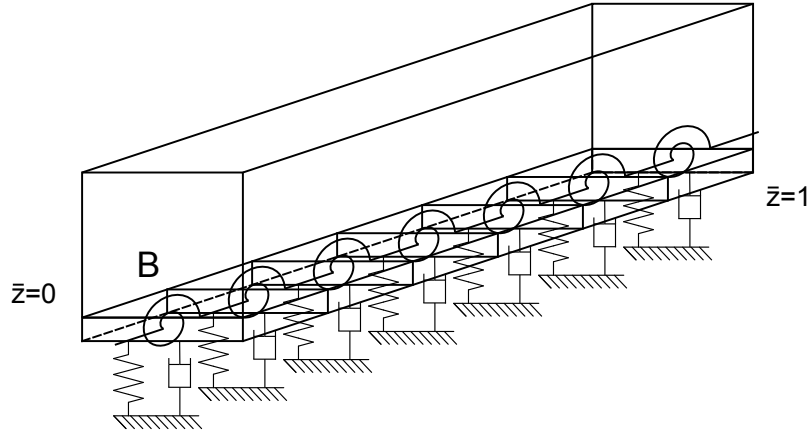


FIGURE 3.15 – Modèle structural de type poutre.

### 3.4.7.1 Équation eikonale et lieu des racines

L'équation structurale à l'ordre  $\epsilon^0$  est déduite :

$$\frac{D_f}{H^4} \bar{k}^4 v_0(\bar{z}) + \left[ -\omega^2 M(z) + i\omega D(z) + S(z) \right] v_0(\bar{z}) = -p_0(\bar{y} = 0, \bar{z}) \quad (3.98)$$

L'équation eikonale en est déduite avec l'hypothèse (3.77) pour le champ de pression :

$$\frac{D_f}{H^4} \bar{k}^4 - \omega^2 M(\bar{z}) + i\omega D(\bar{z}) + S(\bar{z}) - \frac{\rho_f b \omega^2 H}{\bar{k}(\bar{z}) \tanh(\bar{k}(\bar{z}))} = 0 \quad (3.99)$$

L'équation structurale à l'ordre  $\epsilon^1$  est déduite de (3.97) :

$$\left[ \frac{D_f}{H^4} \bar{k}^4 - \omega^2 M + i\omega D + S \right] v_1(\bar{z}) + i \frac{D_f}{H^4} \left[ 4\bar{k}^3 v'_0 + 6\bar{k}' \bar{k}^2 v_0(\bar{z}) \right] = -p_1(\bar{y} = 0, (\bar{z})) \quad (3.100)$$

Comme pour les deux cas précédents, l'équation eikonale est résolue numériquement. Pour une raideur en flexion  $D_f = 1[N.m^{-3}]$ , le lieu des racines est tracé (voir figure 3.16). Comme pour le cas de la membrane (voir figure 3.14), le premier mode reste propagatif jusqu'à l'extrémité du guide d'onde. L'augmentation de la raideur en flexion  $D_f$  provoque une modification de la forme du lieu des racines des modes évanescents. Sur la figure (3.16), un changement de sens de rotation est observé pour le quatrième mode.

### 3.4.7.2 Amplitude

Comme précédemment l'équation du fluide à l'ordre  $\epsilon^1$  est multipliée par le champ de pression  $p_0(\bar{z})$  et intégrée sur la hauteur de la section. Le terme (3.85) est cette fois égal à :

$$\int_0^1 \left[ \bar{\Delta}_T p_1 - \bar{k}^2 p_1 \right] p_0 d\bar{y} = -\frac{i\rho_f \omega^2 B}{H^3} \left[ 6\bar{k}' \bar{k}^2 v_0^2 + 4\bar{k}^3 v_0 v'_0 \right] \quad (3.101)$$

Finalement, l'équation de conservation du travail fourni d'une section à l'autre s'écrit pour le cas de la poutre en flexion :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[ \bar{k} \int_0^1 p_0^2 d\bar{y} + \frac{2\rho_f \omega^2 B}{H^3} \bar{k}^3 v_0^2 \right] = 0 \quad (3.102)$$

Le deuxième terme correspond à la conservation du travail transmis d'une section à la suivante par le couplage mécanique apporté par le terme de poutre.

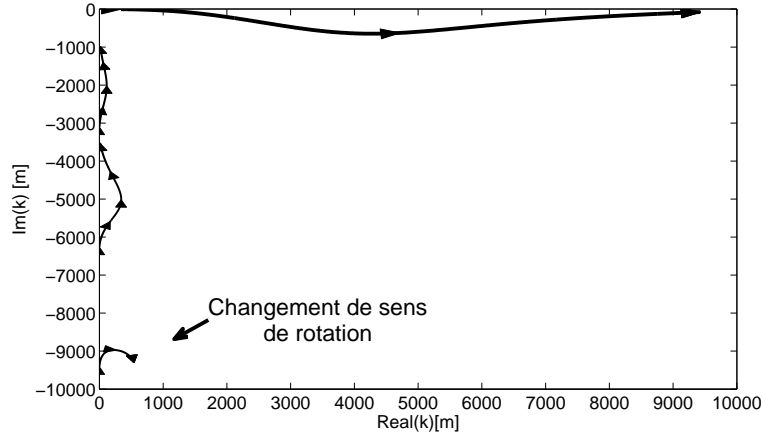


FIGURE 3.16 – Lieu des racines des quatre premiers modes pour le modèle de type poutre. La partie imaginaire des nombres d'onde est tracée en fonction de la partie réelle. Les flèches indiquent la direction de la base vers l'apex.

### 3.4.8 Réponse globale

Les équations (3.88), (3.95) et (3.102) permettent de calculer l'amplitude de chacun des modes à une constante près. Dans la plupart des cas, seul le premier mode (propagatif), noté  $i$ , et le mode réfléchi correspondant, noté  $r$ , sont considérés. Il faut alors définir une constante pour chacun des modes, respectivement  $G_i$  et  $G_r$ . Les pressions des modes incident et réfléchi sont exprimées par :

$$p_i(\bar{z}) = -H\Phi(\bar{y}, \bar{z})v_i(\bar{z}) \quad (3.103)$$

$$p_r(\bar{z}) = -H\Phi(\bar{y}, \bar{z})v_r(\bar{z}) \quad (3.104)$$

L'amplitude de déplacement de la structure apparait au carré dans les termes liés au couplage longitudinal mécanique des (3.95) et (3.102). Ces termes sont alors notés  $F(\bar{k})v_0^2(\bar{z})$ . La fonction  $F(\bar{k})$  a deux valeurs différentes pour le cas de la structure de type membrane et pour le cas de la structure de type poutre. Elle est nulle dans le cas de la structure à réaction locale. Dans tous les cas, cette fonction est paire. Pour chacune des ondes (incidentes et réfléchies) la relation suivante est vérifiée :

$$\left[ \bar{k}(\bar{z})H^2 \int_0^1 \Phi^2(\bar{y}, \bar{z})d\bar{y} + F(\bar{k}(\bar{z})) \right] v_{i0}^2(\bar{z}) = G_i \quad (3.105)$$

$$\left[ -\bar{k}(\bar{z})H^2 \int_0^1 \Phi^2(\bar{y}, \bar{z})d\bar{y} + F(-\bar{k}(\bar{z})) \right] u_{r0}^2(\bar{z}) = G_r \quad (3.106)$$

$$(3.107)$$

Les conditions aux limites en bout de guide d'onde sont utilisées afin de calculer les constantes  $G_i$  et  $G_r$ . Dans la cochlée, une pression est appliquée en  $z = 0$  et les deux canaux fusionnent en  $z = L$  ce qui impose une pression nulle. Pour une excitation harmonique d'amplitude  $p_s = v_s\Phi(\bar{y}, \bar{z})$ , ces deux conditions se traduisent donc par :

$$p(z = 0) = p_s = v_s\Phi(\bar{y}, 0) \quad (3.108)$$

$$p(z = L) = 0 \quad (3.109)$$

Le problème des conditions aux limites est exprimé par les relations :

$$v_s = v_{i0}(0) + v_{r0}(0) \quad (3.110)$$

$$0 = v_{i0}(1)e^{-i \int_0^1 \bar{k} d\bar{z}} + v_{r0}(1)e^{i \int_0^1 \bar{k} d\bar{z}} \quad (3.111)$$

$$v_{i0}^2(0) = \frac{[\bar{k}(1)H^2 \int_0^1 \Phi^2(\bar{y}, L) d\bar{y} + F(\bar{k}(1))]}{[\bar{k}(0)H^2 \int_0^1 \Phi^2(\bar{y}, 0) d\bar{y} + F(\bar{k}(0))]} v_{i0}^2(1) \quad (3.112)$$

$$v_{r0}^2(0) = \frac{[\bar{k}(1)H^2 \int_0^1 \Phi^2(\bar{y}, 1) d\bar{y} + F(\bar{k}(1))]}{[\bar{k}(0)H^2 \int_0^1 \Phi^2(\bar{y}, 0) d\bar{y} + F(\bar{k}(0))]} v_{r0}^2(1) \quad (3.113)$$

Les valeurs des amplitudes  $v_{i0}$  et  $v_{r0}$  sont les seules inconnues et peuvent donc être calculées. La relation 3.111 permet d'exprimer un coefficient de réflexion entre l'amplitude de l'onde incidente et l'amplitude de l'onde réfléchie :

$$R = \left| \frac{v_{r0}(1)}{v_{i0}(1)} \right| = \left| \frac{v_{r0}(0)}{v_{i0}(0)} \right| = e^{-2Im\left(\int_0^1 \bar{k} d\bar{z}\right)} \quad (3.114)$$

### 3.4.9 Résultats

Les amplitudes sont tracées avec les paramètres décrits dans la table 3.3. Dans chacun des cas, uniquement le premier mode (propagatif) est tracé. Les modes évanescents sont négligés. Pour le cas de la structure à réaction locale (voir figure 3.17), selon la fréquence, la courbe enveloppe de réponse atteint un maximum en un point précis correspondant à la place caractéristique. Pour les basses fréquences, la courbe présente deux pics en raison de l'interférence avec l'onde réfléchie. Pour les hautes et moyennes fréquences (5000 et 10000 Hz), l'amplitude chute juste en aval de la place caractéristique. La pente de cette décroissance est très forte (10 décade par 1 mm). Pour la structure de type membrane,

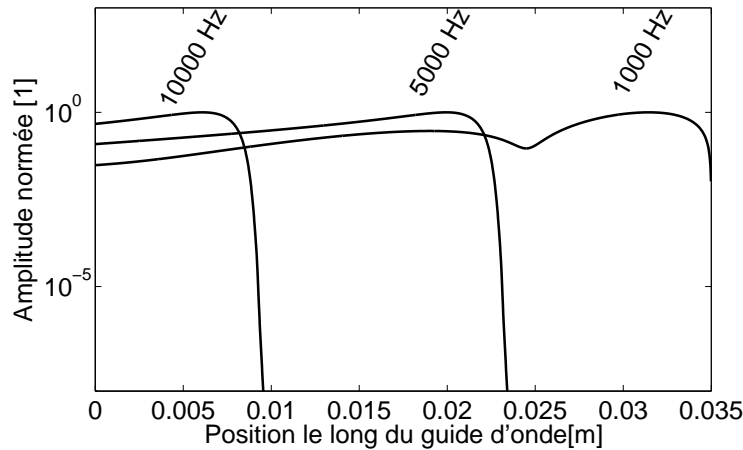


FIGURE 3.17 – Amplitude de l'onde tracée pour les fréquences 1000 Hz, 5000 Hz et 10000 Hz pour le modèle de structure à réaction locale.

le comportement est légèrement différent. La pente de décroissance après la place caractéristique est nettement plus faible et n'est pas constante. La tension de la membrane et le fait que le premier mode soit propagatif jusqu'au bout du guide d'onde provoque une

réflexion non négligeable au bout du guide d'onde pour les moyennes et haute fréquences également. Cette réflexion est visible sur la figure (3.18) pour l'amplitude de 5000 Hz. Dans le cas du couplage longitudinal mécanique par l'intermédiaire du modèle poutre, la

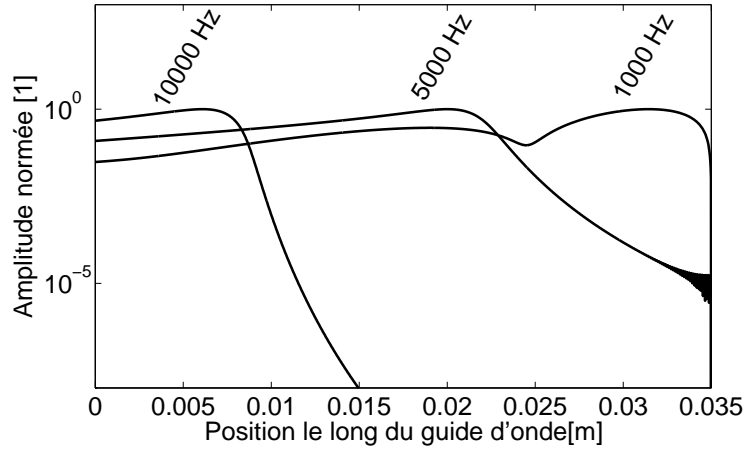


FIGURE 3.18 – Amplitude de l'onde tracée pour les fréquences 1000 Hz, 5000 Hz et 10000 Hz pour le modèle de structure de type membrane.

réflexion des ondes en bout de guide est d'autant plus marquée. Ces observations sont à relativiser car le choix des paramètres de tension et de raideur en flexion est arbitraire et une plus forte tension améliore la propagation des ondes.

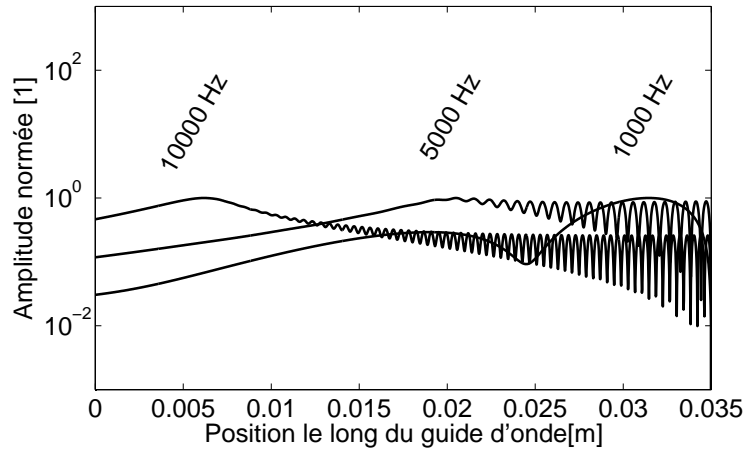


FIGURE 3.19 – Amplitude de l'onde tracée pour les fréquences 1000 Hz, 5000 Hz et 10000 Hz pour le modèle de structure de type poutre (poutre).

### 3.5 Bilan de la méthode WKB classique

La méthode WKB décrite de deux façons par Steele [131] d'une part, et par Holmes [52] d'autre part, permet de déterminer de façon semi-analytique la propagation des ondes dans un guide d'onde inhomogène. La relation de dispersion, ou équation eikonale obtenue

définit une relation entre la fréquence de vibration et le nombre d'onde. Un nombre infini de solutions existent mais il est judicieux de se limiter aux premiers modes possédant un nombre d'onde à la partie imaginaire relativement proche de zéro. Les autres modes étant très évanescents, ils disparaissent très rapidement et n'influencent pas ou peu la réponse. Plusieurs solutions à l'équation eikonale sont trouvées numériquement. Les nombres d'onde déterminent la forme de l'onde se propageant. Cette première étape peut être comparée à la recherche des valeurs propres dans une analyse modale de structure classique. La seconde étape consiste à calculer l'amplitude de l'onde en tous les points du guide d'onde, ce qui pourrait être comparé à la détermination de la forme modale. Pour cette étape, chacun des nombres d'onde trouvés précédemment définit un mode de propagation. L'amplitude de chaque mode de propagation est résolue en utilisant les équations du premier ordre en  $\epsilon^1$ . Enfin, la réponse globale du guide d'onde est reconstituée en ajoutant la réponse de chacun des modes. Se pose alors la question de savoir comment pondérer un mode par rapport à l'autre. Dans la plupart des cas, seul le premier mode et le mode réfléchi correspondant sont pris en compte. Les résultats pour le cas de la membrane et de la poutre sont satisfaisant. Cependant, les résultats avec le modèle à réaction locale montre ses limites. L'amplitude de la réponse chute fortement après la place caractéristique et la comparaison avec les résultats des modèles par éléments finis montre une différence (voir figure 3.20). L'erreur de la méthode WKB pour le cas de la structure à réaction

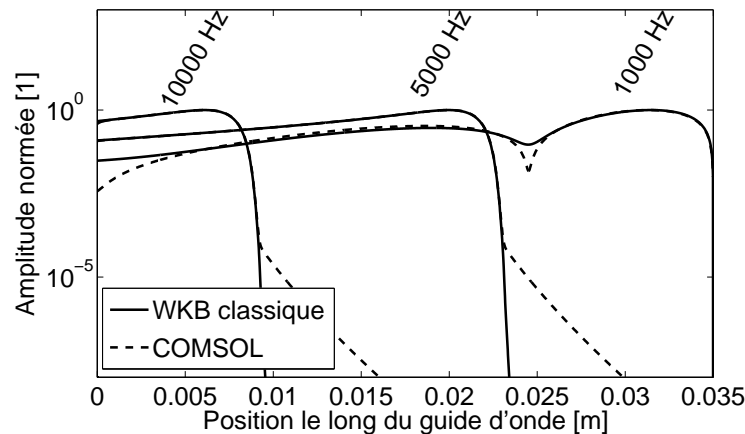


FIGURE 3.20 – Comparaison entre le modèle par éléments finis à deux dimensions (voir section 2.2.1) et le modèle WKB par projection (WKB-P).

locale est connu [28]. Plusieurs auteurs ont proposé une explication à ce phénomène et une solution pour résoudre ce problème. Parthasarathi [104] montre que la solution de la méthode WKB est correcte pour les zones en aval et en amont de la place caractéristique. Une zone de transition est alors définie et la solution est reconstruite à partir des solutions amont et aval. La solution obtenue est plus proche de la référence (modèle numérique) mais l'explication n'est pas satisfaisante.

Pour Watts [141, 140], l'équation de Laplace n'est pas exactement résolue par l'approximation WKB. Sa méthode consiste à utiliser le deuxième mode (premier mode évanescant) et de compléter la solution afin que l'équation de Laplace soit résolue exactement. Cette méthode fonctionne mais est difficilement applicable à l'utilisation de plus de deux modes. Cheng [19] modifie l'équation de départ vérifiée par le champ fluide et considère un canal rigide. La structure est alors considérée comme une force d'excitation. L'avantage est que

les modes transverses peuvent être considérés « classiquement » par une somme infinie de fonctions cosinusoidales dans chacune des directions (contrairement à la méthode WKB, où le champ fluide utilise la fonction cosinus hyperbolique). Cheng montre que les réponses sont équivalentes à la réponse obtenue par la méthode WKB. Cependant, le problème est modifié et la solution pour la méthode WKB n'est pas apportée.

En reprenant le concept de couplage avec les modes évanescents, introduit par Watts, une méthode est développée afin de prendre en compte l'interaction du mode propagatif avec les modes évanescents.

### 3.6 Couplage avec les modes évanescents

Dans cette section, la méthode WKB utilisant la projection (voir section 3.4) est reprise mais une nouvelle solution est proposée. Les solutions admissibles trouvées à partir de l'équation eikonale sont désormais notées  $\bar{k}_r$ . Elles sont réutilisées pour construire cette nouvelle solution. Contrairement au développement de la section précédente, la solution est désormais recherchée sous la forme de la somme des  $M$  premiers modes :

$$P(\bar{y}, \bar{z}, t) = \sum_{r=1}^{r=M} p_r(\bar{y}, \bar{z}, \epsilon) e^{i\psi_r} e^{i\omega t} \quad (3.115)$$

avec chacun des termes  $p_r(\bar{y}, \bar{z}, \epsilon)$  développés sous la forme :

$$p_r(\bar{y}, \bar{z}, \epsilon) = p_{r0}(\bar{y}, \bar{z}) + \epsilon p_{r1}(\bar{y}, \bar{z}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.116)$$

Les fonctions de phase  $\psi_r(\bar{z}, \epsilon)$  sont définies à partir des  $\bar{k}_r$  :

$$\psi_r(\bar{z}, \epsilon) = -\epsilon^{-1} \int_0^{\bar{z}} \bar{k}_r(s) ds \quad (3.117)$$

En intégrant la forme proposée dans l'équation de Laplace (3.71), l'équation du fluide est exprimée par :

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^{r=M} \left[ \Delta_T p_{r0} - \bar{k}_r^2 p_{r0} \right] e^{i\psi_r} e^{i\omega t} \\ & + \epsilon \sum_{r=1}^{r=M} \left[ \Delta_T p_{r1} - \bar{k}_r^2 p_{r1} - 2i\bar{k}_r p'_{r0} - i\bar{k}'_r p_0 \right] e^{i\psi_r} e^{i\omega t} \\ & + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.118)$$

Au premier ordre, un champ de pression  $p_{r0}$  est proposé par :

$$p_{r0}(\bar{y}, \bar{z}) = -H v_{r0}(\bar{z}) \Phi_r(\bar{y}, \bar{z}) \quad (3.119)$$

où la forme du champ de pression est exprimée à partir des solutions  $\bar{k}_r(\bar{z})$  de l'équation eikonale.

$$\Phi_r(\bar{y}, \bar{z}) = \rho_f \omega^2 \frac{\cosh(\bar{k}_r(\bar{z})(\bar{y} - 1))}{\bar{k}_r(\bar{z}) \sinh(\bar{k}_r(\bar{z}))} \quad (3.120)$$

Le champ de pression ainsi défini est toujours solution de l'équation 3.118 à l'ordre  $\epsilon^0$  et vérifie les conditions aux limites.



### 3.6.1 Relation d'orthogonalité

Le calcul de l'intégral du produit de deux modes de pression sur la hauteur de la section transverse donne :

$$\int_0^1 \Phi_r(\bar{y}, \bar{z}) \Phi_q(\bar{y}, \bar{z}) d\bar{y} = \frac{\rho_f^2 \omega^4}{\bar{k}_r^2 - \bar{k}_q^2} \left[ \frac{1}{\bar{k}_q \tanh(\bar{k}_q)} - \frac{1}{\bar{k}_r \tanh(\bar{k}_r)} \right] \quad (3.121)$$

Puisque  $\bar{k}_q$  et  $\bar{k}_r$  sont solutions de l'équation eikonale 3.81, le produit est nul pour deux modes distincts :

$$\int_0^1 \Phi_r(\bar{y}, \bar{z}) \Phi_q(\bar{y}, \bar{z}) d\bar{y} = 0 \quad (3.122)$$

Cette relation d'orthogonalité permet de projeter sur les  $M$  modes afin d'obtenir  $M$  équations indépendantes.

### 3.6.2 Projection

L'équation du fluide à l'ordre  $\epsilon^1$  (voir équation 3.118) est multipliée par l'une des solutions  $p_{q0}$ . L'intégrale sur la section transverse donne par intégration par partie :

$$\int_0^1 \left[ \bar{\Delta}_T p_{r1} - \bar{k}_r^2 p_{r1} \right] p_{q0} d\bar{y} = (\bar{k}_q^2 - \bar{k}_r^2) \int_0^1 p_{q0} p_{r1} d\bar{y} + \left[ \frac{\partial p_{r1}}{\partial \bar{y}} p_{q0} - \frac{\partial p_{q0}}{\partial \bar{y}} p_{r1} \right]_0^1 \quad (3.123)$$

Ce terme est nul quel que soit  $r$  et  $q$ . L'équation à l'ordre  $\epsilon^1$  projetée devient donc :

$$\sum_{r=1}^{r=M} \left[ \int_0^1 -2i\bar{k}_r p'_{r0} p_{q0} d\bar{y} - \int_0^1 i\bar{k}'_r p_{r0} p_{q0} d\bar{y} \right] e^{i\psi_r} e^{i\omega t} \quad (3.124)$$

$$(3.125)$$

Lorsque  $q = r$ , le résultat précédent (voir équation 3.88) est retrouvé. Lorsque  $q \neq r$ , un couplage entre les modes apparaît. Afin de faciliter la résolution, l'équation 3.118 est projetée sur les  $M$  formes modales  $\Phi_q(\bar{y}, \bar{z})$  sans faire intervenir le déplacement  $v_{q0}$ .  $M$  équations distinctes sont obtenues et mises sous la forme d'un système matriciel :

$$-2i[H0][v_{i0}]' - 2i[H1][v_{i0}] - i[H0p][v_{i0}] = 0 \quad (3.126)$$

où les termes des matrices  $[H1]$ ,  $[H0]$  et  $[H0p]$  sont définis par :

$$[H1](r, q) = \bar{k}_r \int_0^1 \Phi'_r(\bar{y}, \bar{z}) \Phi_q(\bar{y}, \bar{z}) d\bar{y} e^{i\psi_r} \quad (3.127)$$

$$[H0](r, q) = \bar{k}_r \int_0^1 \Phi_r(\bar{y}, \bar{z}) \Phi_q(\bar{y}, \bar{z}) d\bar{y} e^{i\psi_r} \quad (3.128)$$

$$[H0p](r, q) = \bar{k}'_r \int_0^1 \Phi_r(\bar{y}, \bar{z}) \Phi_q(\bar{y}, \bar{z}) d\bar{y} e^{i\psi_r} \quad (3.129)$$

Les nombres d'onde  $\bar{k}_r$  et  $\bar{k}_q$ , et donc les formes modales  $\Phi_r$  et  $\Phi_q$  sont connus par la résolution de l'équation eikonale. Ces matrices peuvent donc être calculées pour chacune des sections transverses. Les  $M$  déplacements  $u_r$  inconnus peuvent être calculés à partir de ces  $M$  équations. Grâce à la relation d'orthogonalité (voir équation 3.122), les matrices  $H0$  et  $H0p$  sont diagonales. La matrice  $H1$  n'a pas de raison d'être diagonale et fournit le couplage entre les modes. Dans la méthode WKB classique, les matrices  $H0$  et  $H0p$

correspondent à la conservation de l'énergie pour chaque mode et la matrice  $H1$  n'est pas considérée. Une expression analytique du coefficient de couplage entre chaque mode peut être obtenue par l'intégrale :

$$\int_0^1 \Phi'_r(\bar{y}, \bar{z}) \Phi_q(\bar{y}, \bar{z}) d\bar{y} = \left( \rho_f \omega^2 \right)^2 \frac{(\bar{k}_r - \bar{k}_q) \cosh(\bar{k}_r + \bar{k}_q) + (\bar{k}_r + \bar{k}_q) \cosh(\bar{k}_r - \bar{k}_q) - 2\bar{k}_r}{2\bar{k}_q (\bar{k}_r^2 - \bar{k}_q^2) \sinh(\bar{k}_q) \sinh(\bar{k}_r)} \quad (3.130)$$

Le même développement est réalisé pour les ondes réfléchies. Aucun couplage n'est considéré entre les ondes incidentes et réfléchies. La seule différence avec le cas précédent est le signe des nombres d'onde. Les ondes incidentes et réfléchies sont reliées par les conditions limites à la base et à l'apex. Le système global finalement obtenu est :

$$\begin{pmatrix} H0^- & O \\ O & H0^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i0}^- \\ u_{i0}^+ \end{pmatrix}' + \left[ \begin{pmatrix} 2H1^- & O \\ O & 2H1^+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H0p^- & O \\ O & H0p^+ \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_{i0}^- \\ u_{i0}^+ \end{pmatrix} = 0 \quad (3.131)$$

où les exposants  $-$  et  $+$  correspondent respectivement aux matrices des ondes incidentes et réfléchies. Le système obtenu est un système d'équation différentielle d'ordre 1 avec  $2 \times M$  variables. Par conséquent, seulement  $4 \times M$  conditions initiales sont nécessaires à la résolution. Les conditions initiales désignent dans ce cas des conditions aux limites puisque la variable de dérivation est la position longitudinale  $\bar{z}$ .

### 3.6.3 Conditions aux limites

Les  $4 \times M$  conditions nécessaires sont réparties en  $2 \times M$  conditions à la base et  $2 \times M$  conditions à l'apex. A la base, une condition de pression est appliquée (voir équation 2.6). Le champ de pression imposé est projeté par la même méthode pour déterminer la valeur de chaque composante. Pour simplifier le calcul, la forme du champ de pression correspond à la forme du premier mode. Ainsi, uniquement la première composante  $v_{10}(\bar{z} = 0)$  est non-nulle.

$$P(\bar{y}, 0) = \Phi_1(\bar{y}, 0) = \frac{\rho \omega^2 \cosh(\bar{k}_1(0)(\bar{y} - 1))}{\bar{k}_1(0) \sinh(\bar{k}_1(0))} \quad (3.132)$$

Le nombre d'onde calculé pour le premier mode à la première section est relativement faible, ce qui produit un champ de pression quasiment constant sur la hauteur du canal. A l'apex, la pression imposée est un champ de pression nul.

$$P(\bar{y}, 1) = -H \sum_{r=1}^{r=M} v_r(1) \Phi_r(\bar{y}, 1) e^{i\psi_r(1)} = 0 \quad (3.133)$$

Comme pour la condition à la base, le champ de pression imposé est réparti sur les composantes  $v_r(\bar{z} = 1)$  des différents modes en projetant cette pression sur les formes modales  $\Phi_r$ . Un problème aux valeurs à la limite (Boundary Value Problem) est à résoudre. Contrairement aux équation différentielles ordinaires, la contrainte des conditions aux limites à chaque extrémité nécessite un traitement particulier. Deux familles de méthodes peuvent être utilisées pour résoudre ce type de système. Les « shooting methods » partent d'une condition et déterminent le point d'arrivée. La condition de départ est ensuite ajustée pour viser le point d'arrivée. Cette méthode est difficilement applicable dans le cas d'un système à  $2 \times M$  variables. La deuxième famille de méthodes est la famille des méthodes numériques. L'équation est discrétisée et un système matriciel regroupant les matrices de toutes les sections est créé. L'inversion de ce système permet de trouver la solution. Ici, la méthode des différences finies en arrière est utilisée.

### 3.6.4 Résultats

Le modèle présenté ici est comparé au modèle par éléments finis présenté précédemment (voir section 2.2.1). Les paramètres utilisés sont ceux définis précédemment dans la table 3.3. Pour sept fréquences différentes réparties sur la plage de réponse, la comparaison

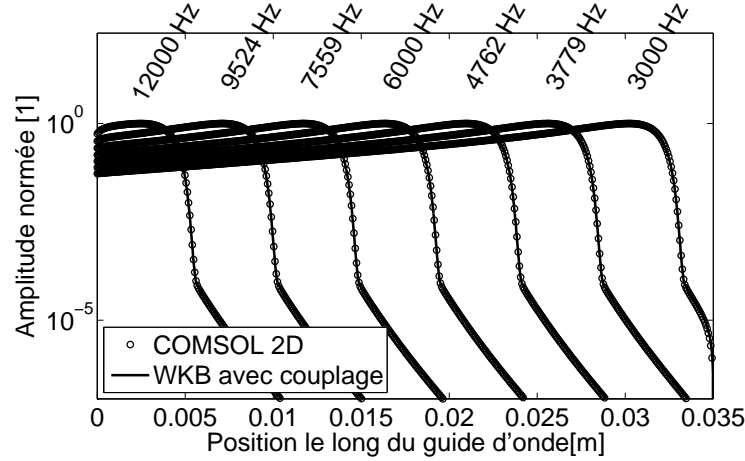


FIGURE 3.21 – Comparaison entre le modèle par éléments finis à deux dimensions (voir section 2.2.1) et le modèle WKB par projection en prenant en compte le couplage entre les modes.

entre l'amplitude donnée par le modèle par éléments finis et le modèle WKB avec prise en compte des modes évanescents est très bonne (voir figure 3.21). Les trois phases de la propagation de l'onde le long du guide d'onde sont reproduites. Dans un premier temps, le premier mode est prépondérant et le résultat est peu modifié par rapport à la figure 3.20. La place caractéristique est le lieu où se produit l'interaction avec les autres modes. La décroissance forte en aval de la place caractéristique est également bien reproduite. La différence avec les résultats précédents se trouve au niveau de la rupture de pente de cette décroissance. Elle est également bien reproduite dans le cas du couplage avec les autres modes. Afin de percevoir le couplage des modes, les termes non diagonaux de la première ligne de la matrice  $H1$  sont normés par rapport au terme sur la diagonale (voir figure 3.22b) et tracés sur la figure 3.22a. Le fait de normer ces termes par rapport au premier de la ligne permet d'estimer l'importance de chacun des modes. Le deuxième mode (premier évanescents) est le seul qui soit plus grand que l'unité et qui est potentiellement influent sur le premier mode. Les autres modes ont une influence plus faible. Ces résultats expliquent pourquoi le modèle développé par Watts [141] donne de bons résultats avec seulement deux modes. L'influence du nombre de modes est représenté pour la réponse à la fréquence 5000 Hz sur la figure 3.23. Pour les paramètres utilisés, deux modes suffisent à représenter correctement la réponse globale.

## 3.7 Conclusion

La méthode WKB est présentée dans ce chapitre et se révèle être un excellent outil pour décrire la réponse de guides d'onde inhomogènes. Plusieurs modèles sont repris et mettent en valeur les avantages de la méthode. Plusieurs outils d'analyse sont utiles à la compréhension des phénomènes vibratoires. La formulation ondulatoire permet d'observer

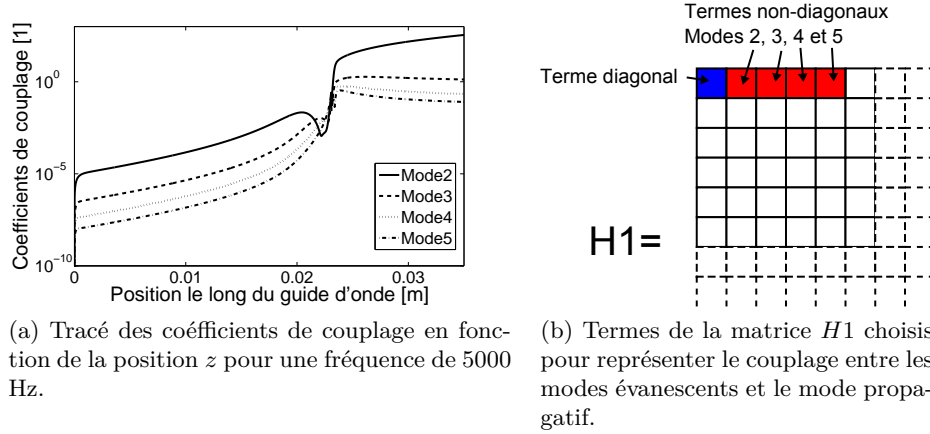


FIGURE 3.22 – Couplage entre les modes évanescents et le mode propagatif.

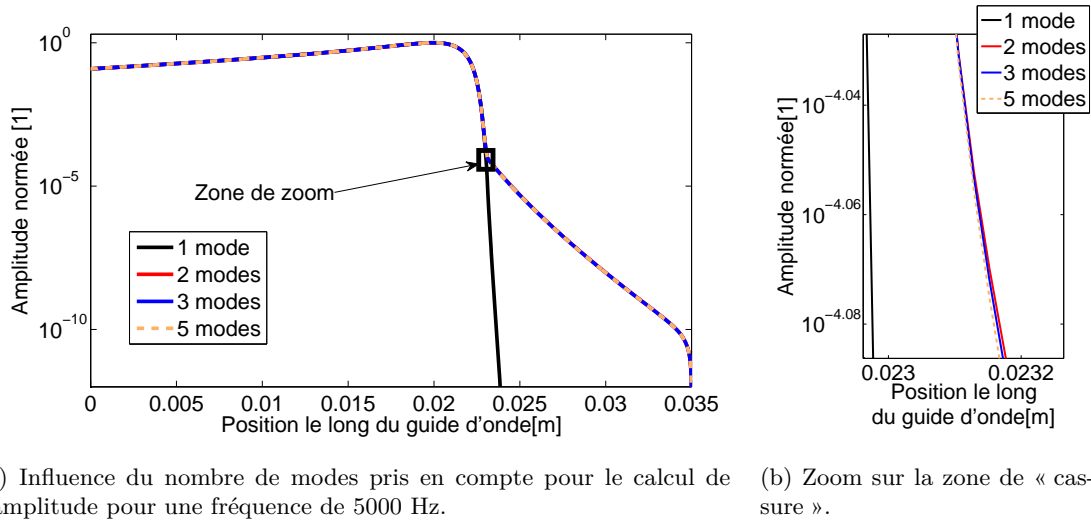


FIGURE 3.23 – Tracé de la réponse du modèle avec couplage en fonction du nombre de modes considérés.

les caractéristiques de propagation des ondes et d'en déduire les effets sur la vibration. Cependant, l'approximation de la méthode WKB génère une erreur peu après la place caractéristique parce que les modes évanescents sont négligés. Un modèle est développé pour prendre en compte ces modes évanescents et représenter plus fidèlement la réponse. Les résultats de ce modèle montrent que les modes évanescents qui sont généralement négligés jouent un rôle important dans le calcul de l'amplitude de l'onde. La zone juste en aval de la place caractéristique est particulièrement influencée par la prise en compte ou non de ces modes évanescents. En acoustique, ces modes sont généralement considérés aux limites du système. Ici, ils apparaissent au centre du guide d'onde. Le premier mode évanescent a plus d'influence que les suivants.

Le modèle de couplage ouvre également la voie pour le couplage de modes propagatifs. Dans la cochlée, la structure de l'organe de Corti est faite de telle sorte que plusieurs modes propagatifs peuvent apparaître. L'étude de ces modes transverses est approfondie dans le chapitre suivant.

## Chapitre 4

# Détermination des modes transverses de l'organe de Corti

La grande sensibilité de la cochlée provient principalement de la mobilité somatique des cellules cillées externes et du *cochlear amplifier* (voir chapitre 1). Cependant, Zwislocki [155] révèle que la mécanique passive peut également jouer un rôle dans la stimulation de ces cellules cillées. La stimulation résulte d'un mouvement de flexion des cils situés dans l'interstice entre la reticula lamina et la membrane tectoriale (voir figure 4.1). La base

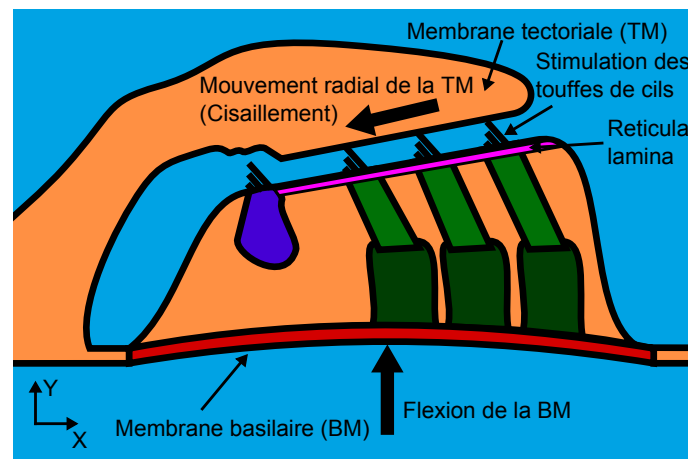


FIGURE 4.1 – Micromécanique de l'organe de Corti dans le plan transverse. La combinaison du mouvement de cisaillement de la membrane tectoriale (TM) et du mouvement de cisaillement opposé de la reticula lamina, lié à la flexion de la membrane basilaire (BM) provoque la stimulation des touffes de cils situées dans l'espace subtectorial.

des touffes de cils est attachée sur les cellules cillées externes et leur mouvement est donc lié au mouvement de la reticula lamina. La membrane tectoriale est appuyée sur l'autre extrémité des cils. Un mouvement radial de la membrane tectoriale provoque donc la déflexion des cils et la stimulation des cellules cillées. Les cellules cillées sont habituellement stimulées par le flux de fluide radial dans l'espace subtectorial [4]. Cependant, la modification des propriétés mécaniques de la membrane tectoriale affecte la réponse active de la cochlée [73, 42] et réduit sa sensibilité. Le rôle de la membrane tectoriale suggéré par Zwislocki est mis en évidence. Des études expérimentales montrent *in vitro* la propagation d'une onde le long de la membrane tectoriale [41, 42]. L'étude de cette onde constitue un

point important pour la compréhension de la micromécanique de la cochlée [112]. Jusqu'à maintenant, seul le mouvement de la membrane basilaire ou de sa structure équivalente était pris en compte. Dans ce chapitre, l'étude est portée sur la détermination des modes transverses dans l'organe de Corti. Un modèle discret à deux degré de liberté, représentant le mouvement de la membrane basilaire et le mouvement de la membrane tectoriale, est d'abord résolu à l'aide de la méthode WKB et de la méthode des éléments finis. Ce premier modèle montre la propagation simultanée de deux ondes. Ensuite, l'étude porte sur un modèle réaliste de la section transverse de l'organe de Corti. La méthode WKB, développée au chapitre 3, est couplée avec un modèle par éléments finis qui permet de déterminer les modes dans chacune des sections transverses. L'objectif de ce modèle est de montrer que la structure particulière de l'organe de Corti peut donner lieu à la propagation simultanée d'un mode de flexion de la membrane basilaire et d'un mode de cisaillement de la membrane tectoriale et provoquer ainsi l'excitation des cellules cillées externes.

## 4.1 Modèle discret à deux degrés de liberté

La méthode WKB présentée au chapitre 3 est fréquemment utilisée dans la littérature pour modéliser la propagation d'une onde dans un guide d'onde inhomogène. Le guide d'onde considéré pour représenter la cochlée ne comporte souvent qu'un seul degré de liberté structural pour la membrane basilaire, même si certains modèles décomposent ce degré de liberté en une combinaison de mouvements des différents éléments de l'organe de Corti [134]. La recherche des nombres d'onde montre qu'un seul mode est propagatif. Les autres modes, dits évanescents, possèdent un nombre d'onde dont le module de la partie imaginaire est nettement supérieur au module de la partie réelle. Le modèle de Lamb et Chadwick [69] comprend deux degrés de liberté correspondant au mouvement de la membrane basilaire et au mouvement de la membrane tectoriale. Le modèle décrit dans cette section reprend les hypothèses de Lamb et utilise la méthode des éléments finis pour résoudre le système. Les résultats sont ensuite comparés au modèle de Lamb, codé à partir de [69].

### 4.1.1 Géométrie et paramètres

La géométrie comprend deux canaux rectangulaires remplis de fluide et séparés par un système de deux masses rigides reliées entre elles par des raideurs linéaires et des amortisseurs visqueux (voir figure 4.2a). Les deux masses représentent la membrane basilaire ( $M2$ ) et la membrane tectoriale ( $M1$ ). Les paramètres de la section varient en fonction de la position longitudinale  $z$  suivant les paramètres définis par Lamb (voir table 4.1). Ces paramètres correspondent à une cochlée de souris.

### 4.1.2 Résolution par la méthode des éléments finis à deux dimensions

Les hypothèses et la méthode de résolution employée sont similaires à celles décrites à la section 2.2.1. La seule différence provient du fait que le modèle comporte ici deux degrés de liberté qui sont représentés par deux variables différentes. La pression dans les canaux est appliquée sur les structures représentées par les masses rigides  $M1$  et  $M2$ . Les mouvements  $v_1$  et  $v_2$  de chacune des masses (voir figure 4.2a) sont résolus par le système matriciel suivant qui est obtenu par l'équilibre dynamique des deux masses :

$$\left[ -\omega^2 M + i\omega D + S \right] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

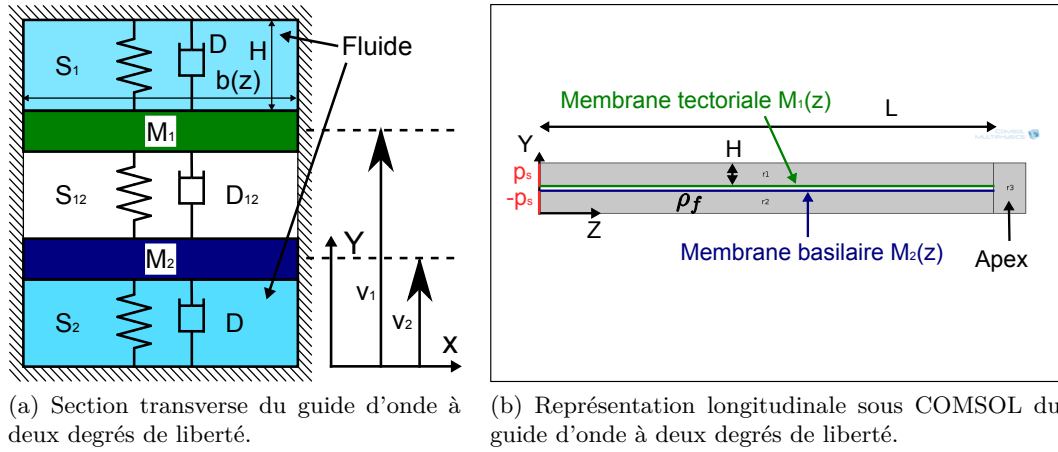


FIGURE 4.2 – Géométrie du guide d'onde à deux degrés de liberté.  $M_1(z)$  représente la membrane tectoriale et  $M_2(z)$  représente la membrane basilaire et le reste de l'organe de Corti.

où les matrices de masse  $M$ , d'amortissement  $D$  et de raideur  $S$  sont définies par :

$$\begin{aligned}
 M &= \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \\
 D &= \begin{pmatrix} D + D_{12} & -D_{12} \\ -D_{12} & D + D_{12} \end{pmatrix} \\
 K &= \begin{pmatrix} S_1 + S_{12} & -S_{12} \\ -S_{12} & S_2 + S_{12} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Les accélérations des masses  $M_1$  et  $M_2$  sont imposées au fluide en retour sur les interfaces fluides structures. Les parois supérieures et inférieures sont définies comme des parois rigides. A l'apex, un passage permet la recirculation du fluide entre les canaux inférieur et supérieur. Le problème résolu est un problème de réponse harmonique à une fréquence donnée. Une pression d'amplitude constante  $p_s$  est appliquée sur la paroi de gauche du canal supérieur. Afin de compenser le volume de fluide déplacé par l'application de cette pression, une pression opposée  $-p_s$  est appliquée sur la paroi de gauche du canal inférieur (voir figure 4.2b). Ces conditions permettent de respecter la condition d'incompressibilité souvent observée dans les modèles de cochlée. Une excitation à  $31500\text{Hz}$  est appliquée

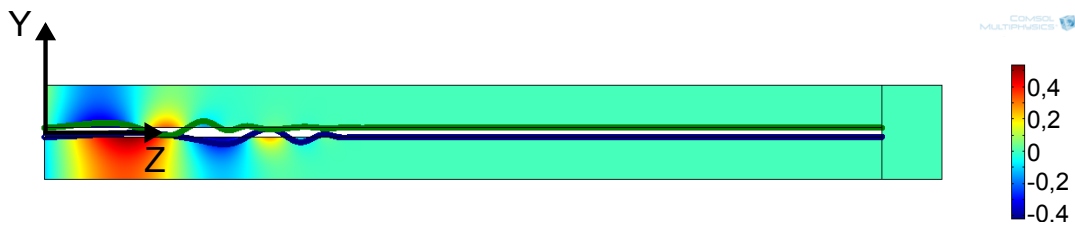


FIGURE 4.3 – Réponse du guide d'onde à deux degrés de liberté pour une excitation unitaire ( $p_s = 1\text{Pa}$ ) harmonique à  $31500\text{Hz}$ . Le déplacement des deux masses est représenté avec une amplification de  $1.10^6$ .

Paramètres	Symbole	Unité	Valeur
Masse volumique du fluide	$\rho_f$	$[kg/m^3]$	1000
Hauteur des canaux	$H$	$[mm]$	1
Longueur de la cochlée	$L$	$[mm]$	7
Position longitudinale	$z$	$[m]$	
Largeur de la section	$b$	$[m]$	$0,1 \times e^{100 \times z}$
Masse linéique ddl n°1	$M_1$	$[kg.m^{-1}]$	$0,0025 \times b(z)$
Masse linéique ddl n°2	$M_2$	$[kg.m^{-1}]$	$0,0025 \times b(z)$
Raideur linéique ddl n°1	$S_1$	$[MPa]$	$2 \times e^{1000 \times z}$
Raideur linéique ddl n°2	$S_2$	$[MPa]$	$4 \times e^{1000 \times z}$
Raideur linéique interaction	$S_{12}$	$[MPa]$	0,05
Amortisseur visqueux interaction	$D_{12}$	$[kg.m^{-1}.s^{-1}]$	0,1
Amortisseur visqueux	$D$	$[kg.m^{-1}.s^{-1}]$	0,4

TABLE 4.1 – Valeur des paramètres utilisés pour décrire la section du guide d'onde à deux degrés de liberté. Paramètres repris de [69].

(comme dans [69]) et la réponse est tracée sur la figure 4.3. Le déplacement n'est pas localisé au même endroit pour les deux structures. La longueur d'onde est différente pour les deux structures et les masses  $M_1$  et  $M_2$  ne vibrent pas en phase.

#### 4.1.3 Résolution par la méthode WKB

La méthode utilisée par Lamb et Chadwick est une adaptation de la méthode WKB pour une structure à réaction locale (voir section 3.4.5) au cas d'une structure à plusieurs degrés de liberté. Dans chaque section, l'équilibre des deux masses excitées par les champs de pression dans le canal inférieur et dans le canal supérieur permet d'établir à l'ordre  $\epsilon^0$  la relation de dispersion sous une forme matricielle :

$$f(z, k, \omega) = -\omega^2 \left[ M + \begin{pmatrix} m_f & 0 \\ 0 & m_f \end{pmatrix} \right] + i\omega D + S = 0 \quad (4.3)$$

où  $f(z, k, \omega)$  est la fonction eikonale et les matrices  $M$ ,  $D$  et  $S$  ont été définies précédemment (voir équation 4.2).  $m_f$  est la masse équivalente de fluide définie par :

$$m_f(z) = \frac{\rho_f b(z)}{k(z) \tanh(k(z)H)} \quad (4.4)$$

La masse équivalente est définie comme la masse de fluide déplacée par le mouvement des structures. Cette masse dépend du nombre d'onde  $k(z)$ . Cette définition provient de l'hypothèse du champ de pression (voir équation 3.78) qui fait apparaître cette masse dans la relation de dispersion (voir équation 3.81). Ici, la masse équivalente  $m_f$  est la même pour les deux canaux car la géométrie est symétrique.

La relation de dispersion 4.3 permet de déterminer les nombres d'onde pour une fréquence  $\omega$  donnée. Le lieu des racines pour les 14 premiers modes est tracé sur la figure 4.4. Le lieu des racines obtenu est proche de celui du modèle à un seul degré de liberté structural (voir figure 3.12). Ici, chacune des boucles est doublée par la boucle correspondant au second degré de liberté. L'amplitude est calculée en utilisant la conservation de l'énergie pour les deux premiers modes propagatifs uniquement. L'énergie de chacun des modes



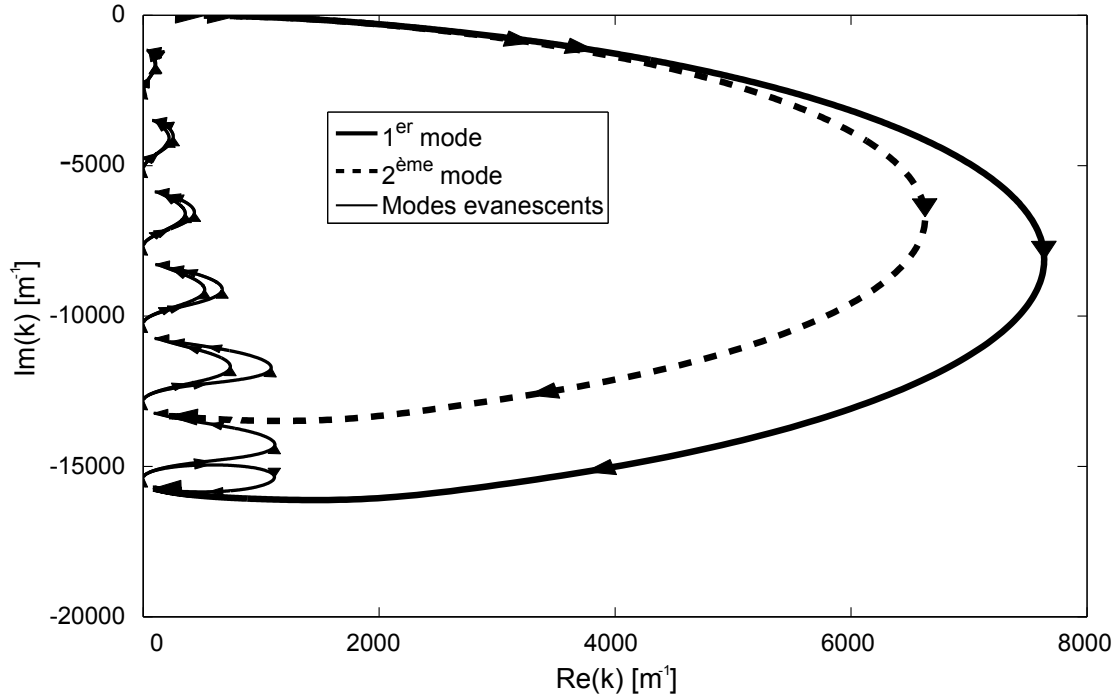


FIGURE 4.4 – Lieux des racines pour les 14 premiers modes à 31500 Hz. Seulement les deux premiers sont propagatifs et les suivants sont évanescents.

se conserve et une courbe d'amplitude normée est calculée pour chaque mode. Ensuite, le poids de chaque mode est ajusté afin de vérifier les conditions aux limites imposées à chaque extrémité. La condition à la limite, reprise du modèle de Lamb, est une condition d'incompressibilité qui impose un flux de fluide de module égal et de signe opposé dans les deux canaux en  $z = 0$ . Les deux modes ne sont pas couplés et n'interagissent pas en dehors du plan d'abscisse  $z = 0$ . Les réponses de chaque mode sont sommées pour obtenir la réponse globale de chacun des degrés de liberté. Les courbes d'amplitude des déplacements  $v_1$  et  $v_2$  sont tracées sur une échelle logarithmique sur la figure 4.5 et comparées pour une fréquence de 31500 Hz aux résultats du modèle par éléments finis (voir section 4.1.2). L'écart avec les résultats numériques de la méthode des éléments finis, relevé au chapitre 3, apparaît également dans ce cas avec une atténuation trop rapide de la réponse pour le modèle WKB après la place caractéristique. Cet écart peut être corrigé en appliquant la méthode développée à la section 3.6 qui consiste à coupler les modes propagatifs avec les modes évanescents. Une autre différence apparaît entre les deux modèles au niveau de la place caractéristique. Cette différence est probablement liée au couplage entre les deux modes propagatifs.

Lamb et Chadwick supposent que les deux modes se propagent de façon découplée mais proposent un couplage par le phénomène de *mode conversion*. Ce phénomène est observé en physique des plasmas lorsque qu'un guide d'onde inhomogène admet plusieurs nombres d'onde dont les lieux des racines viennent se croiser [133, 13, 60, 82]. L'énergie peut alors être échangée entre les différents modes de propagation et un coefficient de transmissibilité est calculé [69].

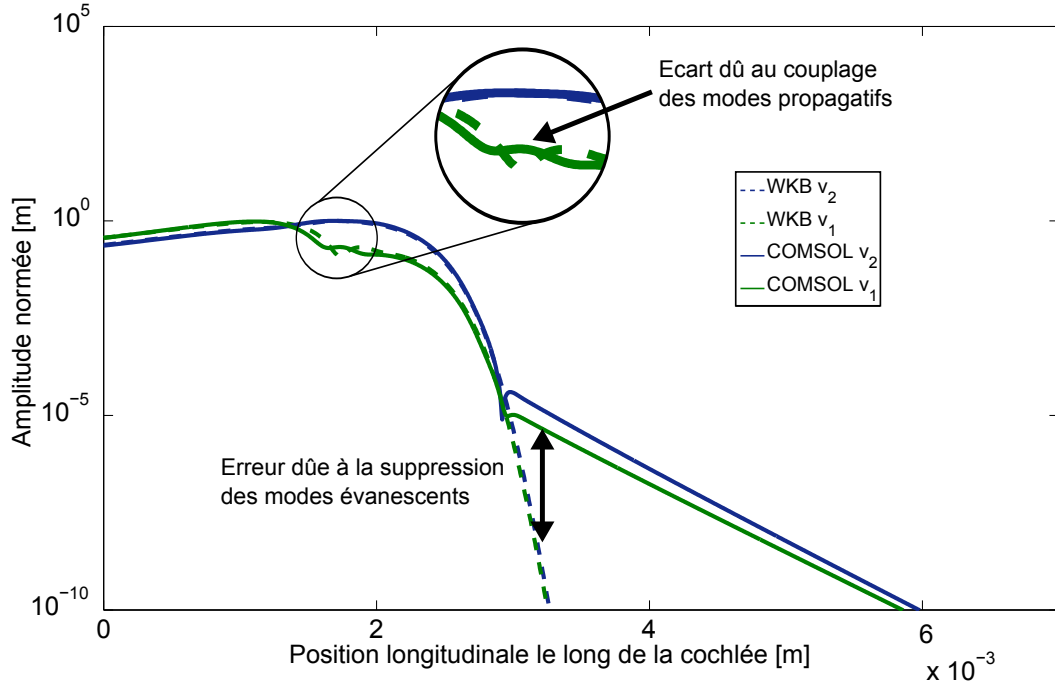


FIGURE 4.5 – Amplitude de déplacement des degrés de liberté  $v_1$  et  $v_2$  à 31500 Hz. Les résultats de la méthode des éléments finis et de la méthode WKB sont comparés.

#### 4.1.4 Discussion

Le modèle présenté dans cette section montre que la membrane tectoriale a une influence sur la réponse globale de la cochlée. Le mode de flexion de la membrane basilaire peut cohabiter avec un second mode aux caractéristiques différentes. La combinaison des deux modes est susceptible de provoquer une stimulation accrue des cellules cillées par un mouvement de cisaillement entre la reticula lamina et la membrane tectoriale. La superposition des deux modes sans couplage montre une différence avec la réponse calculée numériquement, prise comme référence. Cette différence peut s'expliquer par un couplage entre le mode de la membrane tectorial et le mode de la membrane basilaire. Le mouvement de la membrane tectoriale, en plus de stimuler les cellules cillées, est susceptible de modifier le mouvement de la membrane basilaire.

Cette étude préliminaire montre par un modèle très simplifié de l'organe de Corti que le couplage entre deux modes de propagation est présent. Cependant, le modèle à deux masses rigides interagissant chacune avec un canal fluide et interagissant entre elles par le biais d'une raideur et d'un amortisseur ne correspond pas exactement à la réalité physique de l'organe de Corti. La géométrie complexe de l'organe de Corti rend sa cinématique complexe [25] et plus de deux degrés de liberté sont nécessaires à sa représentation. La méthode des éléments finis est adaptée à ce type de modélisation car elle permet de représenter une géométrie complexe tout en couplant plusieurs phénomènes physiques.

Les sections suivantes mettent en application une méthode permettant de trouver des modes dans le plan transverse. L'objectif est d'identifier ces modes et s'ils sont susceptible de présenter un comportement similaire aux modes associés aux deux degrés de libertés du modèle présenté précédemment.

## 4.2 Calcul des modes transverses d'un guide d'onde

La méthode WKB requiert la résolution de l'équation de Helmholtz dans le plan transverse au guide d'onde (voir équation 3.31). La méthode développée au chapitre 3 propose une déformée modale pour le champ fluide et pour la structure pour le cas d'une section rectangulaire (ou d'une section semi-circulaire [52]). La méthode des éléments finis (MEF) permet de résoudre le problème aux dérivées partielles pour une section quelconque. D'autres modèles utilisant la méthode des éléments finis ont été développés pour représenter la propagation d'onde dans un guide d'onde couplé fluide structure [86, 51, 84]. Ces modèles considèrent une tranche épaisse de guide d'onde et déterminent une matrice de transfert entre les deux sections transverses qui limitent la tranche. Les valeurs propres de ces matrices de transfert correspondent aux nombres d'onde admissibles. La méthode présentée dans cette section cherche les valeurs propres dans une section à deux dimensions, ce qui requiert un nombre de degrés de liberté moindre puisque les éléments sont bidimensionnels. Cette méthode est appliquée dans le cadre de la mécanique cochléaire pour montrer l'existence et caractériser le mode de la membrane tectoriale [9, 11, 12]. Dans un premier temps, la méthode couplant WKB et MEF (appelée WKB-EF par la suite) est exposée et validée par comparaison avec la méthode WKB sur un cas simple de section rectangulaire. Ensuite, la méthode est appliquée à la géométrie complexe de l'organe de Corti afin d'identifier les modes transverses.

### 4.2.1 Hypothèses générales

Le problème est exposé dans le cadre général en reprenant les hypothèses de la section 2.1 dans l'espace à trois dimensions. Le système d'équations aux dérivées partielles est ensuite ramené à un problème aux valeurs propres dans le plan transverse en appliquant un développement asymptotique et en exploitant les équations à l'ordre zéro.

Le cadre considéré est l'étude des vibrations harmoniques. Toutes les dérivées par rapport

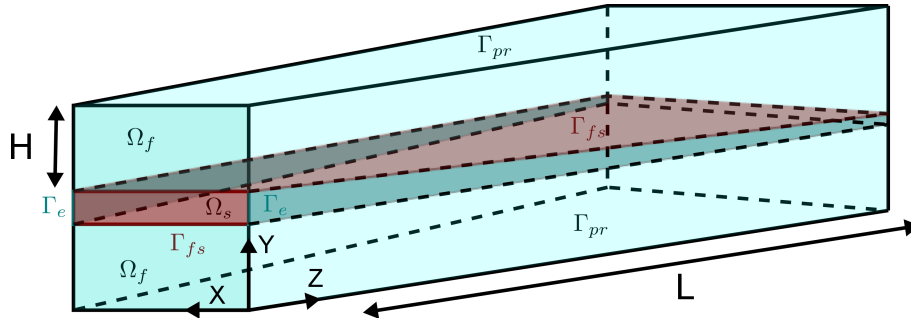


FIGURE 4.6 – Domaine considéré dans l'espace à trois dimensions.

au temps donnent lieu à la multiplication par le facteur  $\times i\omega$ . Un domaine fluide et un domaine solide sont considérés dans l'espace à trois dimensions (voir figure 4.6). Le champ de pression fluide vérifie l'équation d'Helmholtz :

$$\nabla^2 p + k_a^2 p = 0 \quad (4.5)$$

avec les conditions limites de paroi rigide sur la surface  $\Gamma_{pr}$  :

$$\nabla p \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_{pr}} = 0 \quad (4.6)$$

Sur l'interface fluide structure  $\Gamma_{fs}$ , le fluide subit l'accélération du solide et vérifie la relation :

$$\nabla p \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_{fs}} = -\rho_f \omega^2 \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_{fs}} \quad (4.7)$$

où  $\mathbf{u}_s$  est le champ de déplacement dans le solide. Suivant l'approximation de petits déplacements, le domaine solide  $\Omega_s$  est régi par le principe fondamental de la dynamique dans sa forme locale (2.5) :

$$-\rho_s \omega^2 \mathbf{u}_s - \vec{\nabla} \cdot \sigma = 0 \quad (4.8)$$

où  $\sigma$  est le tenseur des contraintes dans le solide. Le premier terme correspond aux forces volumique d'inertie pour un mouvement harmonique. Le champ de déplacement structural

$\mathbf{u}_s$  comprend trois composantes  $\begin{pmatrix} u_s \\ v_s \\ w_s \end{pmatrix}$ . Les conditions limites pour le domaine solide sont des conditions d'encastrement sur la surface  $\Gamma_e$  :

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_e} = 0 \quad (4.9)$$

A la surface d'interaction entre le fluide et le solide, la pression du fluide s'applique sur la paroi solide et la condition suivante est vérifiée :

$$\sigma \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_{fs}} = -p|_{\Gamma_{fs}} \quad (4.10)$$

### 4.2.2 Résolution dans le plan

Le problème est ramené à un problème à deux dimensions. La section du guide d'onde comprenant des domaines fluide et un domaine solide est considérée (voir figure 4.7). Les parois externes  $\Gamma_{pr}$  du guide d'onde sont considérées comme rigides. A l'interface entre le fluide et le solide  $\Gamma_{fs}$ , les relations de continuité des champs des vitesses 2.9 et des efforts 2.10 s'appliquent. Comme pour la méthode WKB classique, la section du guide est supposée varier lentement en fonction de la direction longitudinale  $Z$ . Le guide d'onde est de longueur  $L$  et une des dimensions transverses caractéristiques est  $H$ . Le rapport  $\epsilon = H/L$  est supposé très petit devant l'unité.

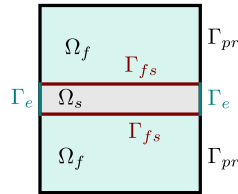


FIGURE 4.7 – Section transverse du guide d'onde couplant domaines fluides et domaine solide.

### 4.2.3 Adimensionnalisation

Afin de ramener le problème à un problème plan, la première étape est l'adimensionnalisation des variables d'espace et de leur dérivées :

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{z}{L} ; \bar{x} = \frac{x}{H} ; \bar{y} = \frac{y}{H} \\ \partial \bar{z} &= \frac{\partial z}{L} ; \partial \bar{x} = \frac{\partial x}{H} ; \partial \bar{y} = \frac{\partial y}{H}\end{aligned}\quad (4.11)$$

### 4.2.4 Expansion asymptotique

#### 4.2.4.1 Domaine fluide

Un développement asymptotique est utilisé pour décrire le champ de pression  $p$  comme un produit d'un champ dans le plan  $(x,y)$  et d'un terme variant longitudinalement :

$$p = \left( p_0 + \epsilon p_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) e^{\psi(\bar{z}, \epsilon)} e^{\omega t} \quad (4.12)$$

L'équation à l'ordre  $\epsilon^0$  dans le domaine fluide plan  $\Omega_f$  est alors :

$$\left[ \bar{\Delta}_T p_0 + \left( H^2 k_a^2 - \bar{k}^2 \right) p_0 \right] e^{i\psi} e^{i\omega t} = 0 \quad (4.13)$$

où  $\bar{\Delta}_T = \partial^2 / \partial \bar{x}^2 + \partial^2 / \partial \bar{y}^2$  est l'opérateur Laplacien dans le plan transverse.  $\bar{k}$  est le nombre d'onde adimensionné défini par la relation :

$$\psi(\bar{z}, \epsilon) = -\epsilon^{-1} \int_0^{\bar{z}} \bar{k}(s) ds \quad (4.14)$$

#### 4.2.4.2 Domaine solide

Le solide est considéré dans l'hypothèse des déformations planes, ce qui revient au modèle de structure à réaction locale. Les déformations hors du plan sont supposées nulles.

Le champ de déplacement  $\begin{pmatrix} u_s \\ v_s \end{pmatrix}$  est décrit par un développement asymptotique comme le produit d'un champ de déplacement dans le plan et d'un terme variant longitudinalement :

$$\mathbf{u}_s = \left( \mathbf{u}_{s0} + \epsilon \mathbf{u}_{s1} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) e^{\psi(\bar{z}, \epsilon)} e^{\omega t} \quad (4.15)$$

L'équation vérifiée par le solide à l'ordre  $\epsilon^0$  est :

$$\left[ \rho_s H \omega^2 \mathbf{u}_{s0} + \vec{\nabla} \cdot \sigma_0 \right] e^{i\psi} e^{i\omega t} = 0 \quad (4.16)$$

#### 4.2.4.3 Conditions aux limites

Dans le cadre de l'expansion asymptotique à l'ordre  $\epsilon^0$ , les conditions limites définies précédemment deviennent :

$$\nabla p_0 \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_{pr}} = 0 \quad (4.17)$$

$$\nabla p_0 \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_{fs}} = -\rho_f \omega^2 H \mathbf{u}_{s0} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_{fs}} \quad (4.18)$$

$$\mathbf{u}_0|_{\Gamma_e} = 0 \quad (4.19)$$

$$\sigma_0 \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_{fs}} = -p_0|_{\Gamma_{fs}} \quad (4.20)$$

### 4.2.5 Problème discrétisé

#### 4.2.5.1 Domaine fluide

La méthode des éléments finis permet de discrétiser les équations aux dérivées partielles afin de limiter la résolution à un système matriciel. Ainsi, le champ de pression est exprimé à l'ordre  $\epsilon^0$  par :

$$p_0 = Rq_{f0} \quad (4.21)$$

où  $q_{f0}$  est le vecteur des degrés de liberté du fluide et  $R$  est la matrice d'interpolation qui dépend des coordonnées  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  dans le plan. Cette matrice permet de retrouver la valeur de la pression en tout point du plan à partir de la valeur des degrés de libertés  $q_{f0}$ .

Pour le fluide, le système matriciel correspondant à l'équation 4.13 est :

$$-\omega^2 \bar{k}^2 M_f \mathbf{q}_{f0} - \omega^2 H^2 k_a^2 M_f + K_f \mathbf{q}_{f0} = -\omega^2 C^T \mathbf{q}_{s0} \quad (4.22)$$

où les matrices  $M_f$  et  $K_f$  sont calculées par :

$$M_f = \iint_{\Omega_f} \left( \frac{1}{\rho_f \omega^2} \right) R^T R d\Omega_f \quad (4.23)$$

$$K_f = \iint_{\Omega_f} \left( \frac{1}{\rho_f} \right) P^T P d\Omega_f \quad (4.24)$$

La matrice  $P$  est le gradient de la matrice d'interpolation  $R$  :

$$P = \nabla R \quad (4.25)$$

La matrice  $C$  est la matrice de couplage entre le fluide et le solide. Elle est détaillée plus loin (voir équation 4.2.5.3).

#### 4.2.5.2 Domaine solide

Le déplacement du solide est également exprimé à l'ordre  $\epsilon^0$  sous une forme discrétisée :

$$\mathbf{u}_{s0} = N \mathbf{q}_{s0} \quad (4.26)$$

où  $N$  est la matrice d'interpolation des déplacement dans le solide et  $\mathbf{q}_{s0}$  est le vecteur des degrés de liberté du solide. La matrice des déformations est alors exprimée par :

$$\mathcal{E}_0 = B \mathbf{q}_{s0} \quad (4.27)$$

où  $B$  est calculé à partir du gradient de la matrice  $N$  :

$$B = \frac{1}{2} (\nabla N + \nabla^T N) \quad (4.28)$$

Les contraintes sont exprimées par la loi de comportement du solide. Dans le cadre de l'élasticité linéaire, les contraintes sont reliés aux déformations par la relation :

$$\sigma_0 = \mathcal{D} \mathcal{E}_0 \quad (4.29)$$

où  $\mathcal{D}$  est la matrice de souplesse du matériau, définie par :

$$\mathcal{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

où  $\nu$  et  $E$  sont respectivement le coefficient de Poisson et le module de Young du matériau. A l'ordre  $\epsilon^0$ , l'équation du solide 4.16 s'exprime par le système matriciel discrétisé :

$$-\omega^2 M_s \mathbf{q}_{s0} + K_s \mathbf{q}_{s0} = C \mathbf{q}_{f0} \quad (4.31)$$

où les matrices  $M_s$  et  $K_s$  sont calculées par :

$$M_s = \iint_{\Omega_s} \rho_s N^T N d\Omega_s \quad (4.32)$$

$$K_s = \iint_{\Omega_s} B^T \mathcal{D} B d\Omega_s \quad (4.33)$$

#### 4.2.5.3 Couplage

Le couplage entre les domaines fluide et solide intervient à travers la matrice  $C$  définie par :

$$C = \int_{\Gamma_{fs}} N^T \mathbf{n} R d\Gamma_{fs} \quad (4.34)$$

Le système couplé peut alors s'écrire sous la forme matricielle [86] :

$$-\bar{k}^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 M_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{s0} \\ \mathbf{q}_{f0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_s - \omega^2 M_s & -C^T \\ -\omega^2 C & K_f - \omega^2 H^2 k_a^2 M_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{s0} \\ \mathbf{q}_{f0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

Pour une fréquence  $\omega$  fixée, ce système correspond à un système aux valeurs propres en  $\bar{k}$ . Le nombre d'onde intervient uniquement dans le domaine fluide mais le couplage des domaines fluides et des domaines solides est réalisé dans la seconde matrice. Le solveur de problèmes aux valeurs propres de COMSOL est utilisé pour résoudre ce système. Les nombres d'onde, valeurs propres du système, sont trouvés ainsi que les modes propres correspondant.

#### 4.2.6 Validation du modèle

Afin de valider le modèle WKB-EF, le calcul des nombres d'onde est appliqué sur un guide d'onde de section rectangulaire, de type « box model », constitué de  $N$  sections (voir figure 4.8). Le calcul de ce type de guide d'onde est réalisable par la méthode WKB

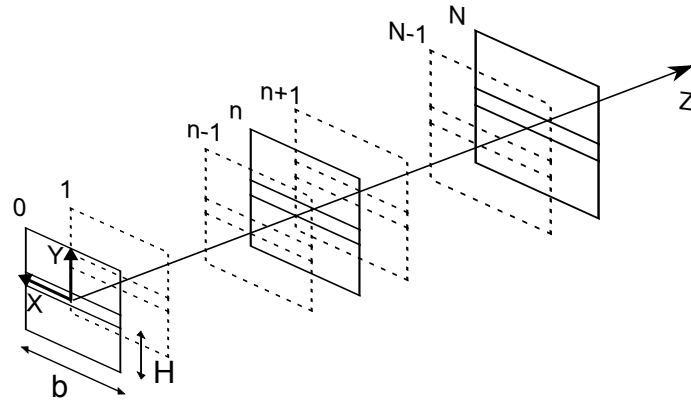


FIGURE 4.8 – Guide d'onde de type « box model » composé de  $N$  sections.

classique et permet de vérifier que la méthode WKB-EF retrouvent les mêmes résultats en termes de valeurs propres (nombres d'onde).

#### 4.2.6.1 Modèle référence (WKB)

Ce modèle est repris et codé à partir de la littérature [131]. Chacune des sections est constituée d'un canal de section rectangulaire rempli de fluide et partitionné en deux canaux de tailles égales par un solide de section rectangulaire (voir figure 4.9). Le solide

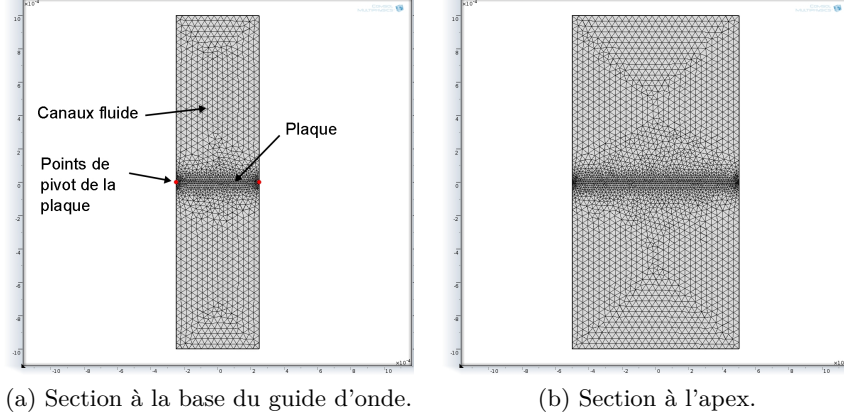


FIGURE 4.9 – Section maillées du guide d'onde à la base et à l'apex pour le modèle WKB-EF.

est en appui simple et une condition de pivot libre pour les points au milieu de la plaque est imposée. Ce modèle correspond à l'une des variantes du guide d'onde résolu à la section 3.3. La jonction de la membrane basilaire avec la partition rigide peut être assimilée à une liaison pivot [53], ce qui signifie que le déplacement imposé est nul et le moment de flexion imposé est nul aux deux points latéraux du plan médian de la plaque :

$$\begin{aligned} v_x(x = \pm b/2) &= 0 \\ \frac{\partial^2 v_x(x = \pm b/2)}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

La fonction de forme transverse utilisée pour décrire le déplacement de la structure avec les conditions d'appuis simples est :

$$v_x(x) = \cos\left(x \frac{\pi}{b}\right) \quad (4.37)$$

La relation de dispersion s'écrit sous la forme (voir équation 3.52 pour la forme générale) :

$$f(\omega, k, z) = \frac{Eh^3}{12} \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 \frac{b}{2} - (\rho_s \frac{bh}{2} \omega^2) - 2\rho_f \frac{b}{2} \omega^2 h_f = 0 \quad (4.38)$$

où  $h_f$  et la hauteur équivalente de fluide calculée par la relation 3.47 :

$$h_f = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_j \tanh(\xi_j H)} \frac{\left( \int_{-b(z)/2}^{b(z)/2} v(x) \cos\left(j \frac{\pi}{b(z)} \left(x - \frac{b(z)}{2}\right)\right) dx \right)^2}{\int_{-b(z)/2}^{b(z)/2} \cos^2\left(j \frac{\pi}{b(z)} \left(x - \frac{b(z)}{2}\right)\right) dx \int_{-b(z)/2}^{b(z)/2} v(x)^2 dx} \quad (4.39)$$

La somme des modes n'est pas infinie et seulement cinquante modes transverses de fluide sont utilisés dans le calcul. Le terme d'amortissement dépend de la fréquence dans le modèle de Cheng (voir équation 3.81). Ici, l'amortissement est introduit sous la forme d'un coefficient d'amortissement structural  $\eta_s$  intégré dans le module de Young



complexe  $E = E_{re}(1 + i\eta_s)$ . Le terme de raideur en flexion peut donc être divisé en un terme de raideur et un terme d'amortissement :

$$\frac{Eh^3}{12} \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 \frac{b}{2} = \frac{E_0h^3}{12} \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 \frac{b}{2} + i\eta_s \frac{E_0h^3}{12} \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 \frac{b}{2} \quad (4.40)$$

Les paramètres de la plaque peuvent s'apparenter à une forme  $-\omega^2 M_e + iD_e + S_e$  où les paramètres de masse équivalente  $M_e$ , d'amortissement équivalent  $D_e$  et de raideur équivalente  $S_e$  sont définis par :

$$M_e = \rho_s \frac{bh}{2} \quad (4.41)$$

$$D_e = \eta_s \frac{E_0h^3}{12} \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 \frac{b}{2} \quad (4.42)$$

$$S_e = \frac{E_0h^3}{12} \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 \frac{b}{2} \quad (4.43)$$

Les paramètres de la plaque sont choisis afin de correspondre aux mêmes ordres de grandeur que les paramètres du modèle à deux dimensions de Cheng, décrits dans la table 2.1. Les paramètres de masse, de raideur et d'amortissement pour les deux modèles sont tracés et comparés sur la figure 4.10 pour une moyenne fréquence de  $5000Hz$ .

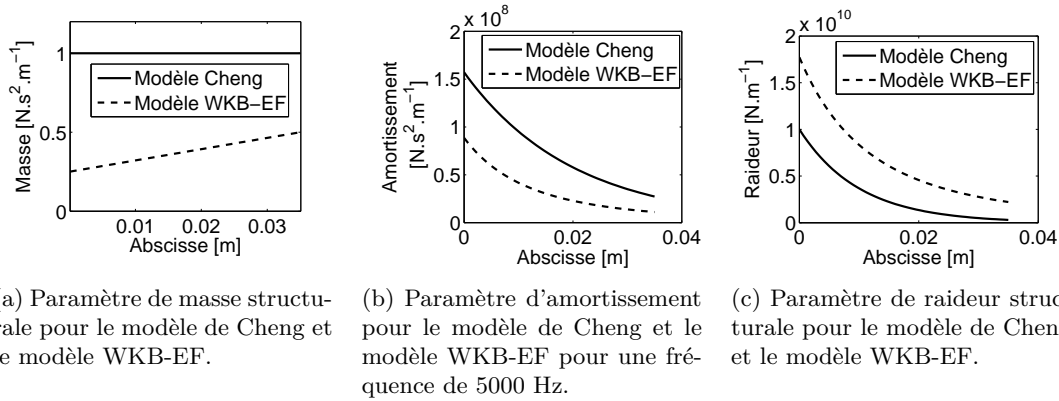
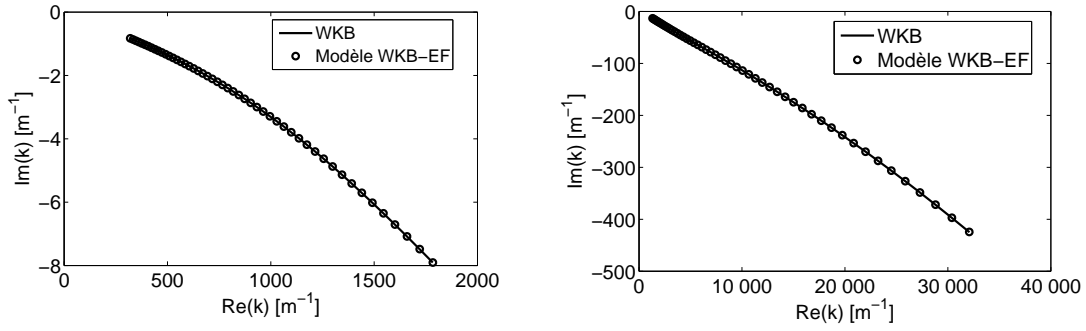


FIGURE 4.10 – La comparaison des paramètres du modèle de Cheng [19] et du modèle WKB-EF pour une fréquence de 5000 Hz montre que les ordres de grandeur sont similaires.

#### 4.2.6.2 Nombres d'onde

Les lieux des nombres d'onde propagatifs (correspondant aux valeurs propres pour le modèle WKB-EF) sont tracés pour deux fréquences 1000 Hz et 5000 Hz (voir figure 4.11). La comparaison avec le modèle WKB est cohérente et les lieux des racines sont similaires pour les basses et moyennes fréquences. La forme du lieu des racines est différente de celle obtenue avec le modèle de Cheng (voir figure 3.12) parce que la variation des paramètres structuraux n'est pas la même. Ici, le terme d'amortissement est proportionnel au terme de masse alors qu'il est proportionnel au carré de la masse dans le modèle de Cheng. Le lieu des racines conserve donc une branche dont la partie réelle et la partie imaginaire ne cessent d'augmenter lorsque l'abscisse s'approche de l'apex. Pour les hautes fréquences, le modèle par éléments finis dans le plan transverse nécessite une adaptation du maillage car la variation du champ de pression est liée à la longueur d'onde  $\lambda$  qui dépend du

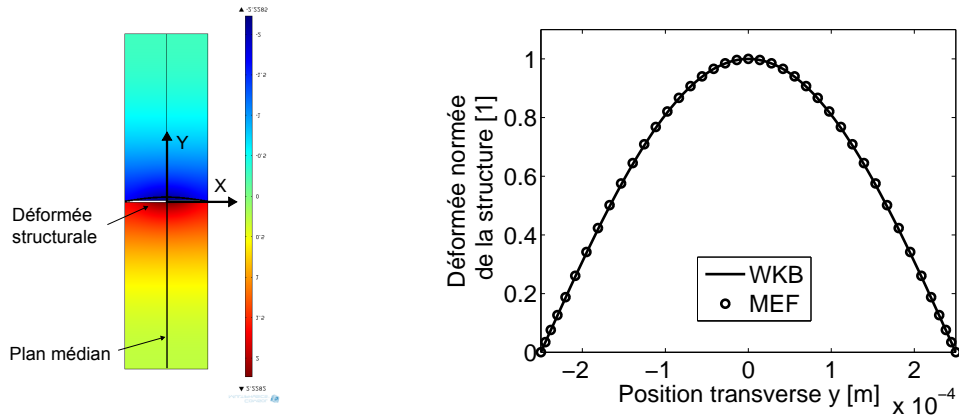


(a) Lieu des racines pour une fréquence de 1000 Hz. (b) Lieu des racines pour une fréquence de 5000 Hz.

FIGURE 4.11 – Lieux des racines tracés pour le modèle couplant la méthode WKB avec la méthode des éléments finis dans les sections transverses pour le « box model ». Les lieux sont tracés et comparés pour 1000 Hz et 5000 Hz.

nombre d'onde par la relation  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ . Un domaine de la taille d'une longueur d'onde est bien représenté par au moins deux éléments quadratiques. La longueur d'onde pour une fréquence de 10000 Hz est de l'ordre de  $5 \mu\text{m}$ , ce qui impose une taille maximale d'élément de l'ordre de  $2,5 \mu\text{m}$ . Le nombre de degrés de liberté du maillage nécessaire pour résoudre un tel modèle est de l'ordre de 40.000. Le temps de calcul pour une fréquence sur une station de calcul à huit processeurs et 8 Mo de mémoire vive est de 10 minutes, ce qui limite l'utilisation de ce modèle lorsque les longueurs d'onde sont faibles.

#### 4.2.6.3 Champ de pression et déplacement



(a) Champ de pression et déformée structurale obtenus par la méthode des éléments finis (MEF) dans la section à la base du guide d'onde.

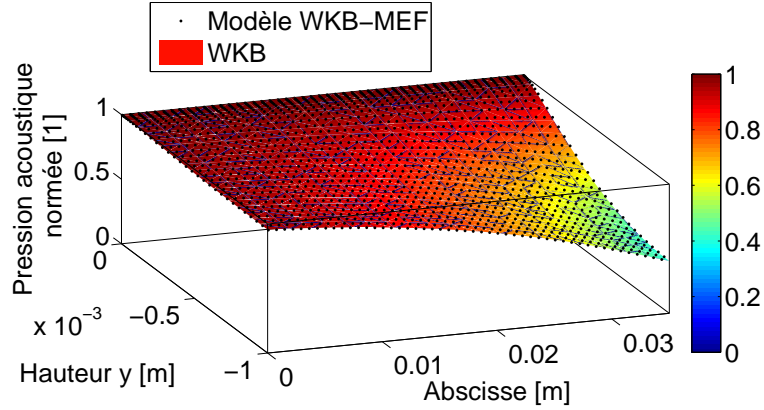
(b) Déformée normée de la structure par la méthode des éléments finis comparée à la déformée modale supposée pour la méthode WKB.

FIGURE 4.12 – Réponse harmonique calculée par la méthode des éléments finis (MEF) de la section à la base ( $z = 0$ ) du guide d'onde pour une fréquence de 5000 Hz.

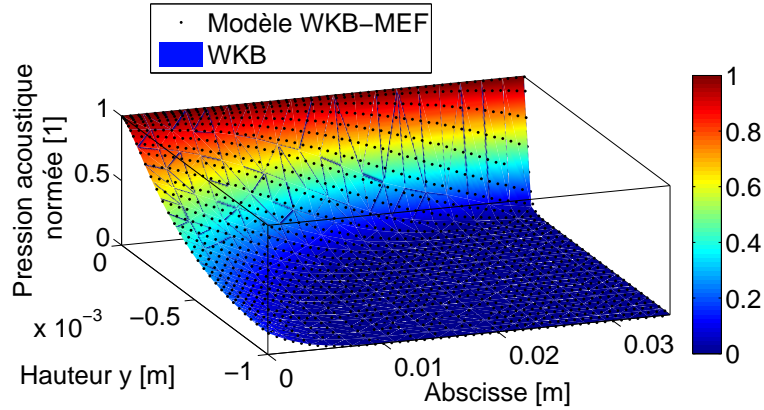
Le déplacement de la structure dans le plan transverse est supposé sous la forme d'un cosinus dans la méthode WKB (voir équation 4.37). Cette forme est comparée à la déformée obtenue par la méthode des éléments finis (voir figure 4.12b). Les résultats montrent que

les deux déformées concordent.

La comparaison des champs de pression entre le modèle par éléments finis et le modèle



(a) Module de la pression pour une fréquence de 1000 Hz en fonction de la position et de la hauteur le long du plan médian du canal inférieur.



(b) Module de la pression pour une fréquence de 5000 Hz en fonction de la position et de la hauteur le long du plan médian du canal inférieur.

FIGURE 4.13 – Modes de pression tracés en fonction de l'abscisse  $z$  le long du guide d'onde et de la position vertical  $y$  pour une basse (1000 Hz) et une moyenne (5000 Hz) fréquence. Les résultats de la méthode WKB-EF sont comparés à la forme proposée dans la méthode WKB.

WKB donne des résultats similaires. Le module de la pression dans le canal inférieur est tracée en fonction de la position  $y$  le long du plan médian longitudinal. Pour des basses fréquences (voir figure 4.13a), le champ de pression à la base est quasiment uniforme, ce qui correspond à un grand nombre d'onde. Lorsque le nombre d'onde augmente, le champ de pression varie sur une hauteur de plus en plus grande. Pour les moyennes fréquences (voir figure 4.13b), le champ de pression varie selon la hauteur du canal. Dans les zone proche de l'apex, le champ de pression est quasiment nul sur toute la hauteur du canal et varie sur une faible épaisseur de fluide proche de la structure, qui correspond à l'épaisseur équivalente définie à l'équation 4.39. Les deux modèles permettent de retrouver ces résultats. Les écarts entre les deux modèles sont faibles. Les modes de pression pour les hautes fréquence ne sont pas représentés car ils présentent peu d'intérêt ici. L'épaisseur équivalente de fluide diminue

encore et le champ de pression devient presque nul dans toute la section. La remarque de la section précédente à propos de la finesse du maillage est illustrée par la forte variation du champ de pression dans une zone proche de la structure qui nécessite un maillage très fin.

#### 4.2.6.4 Bilan

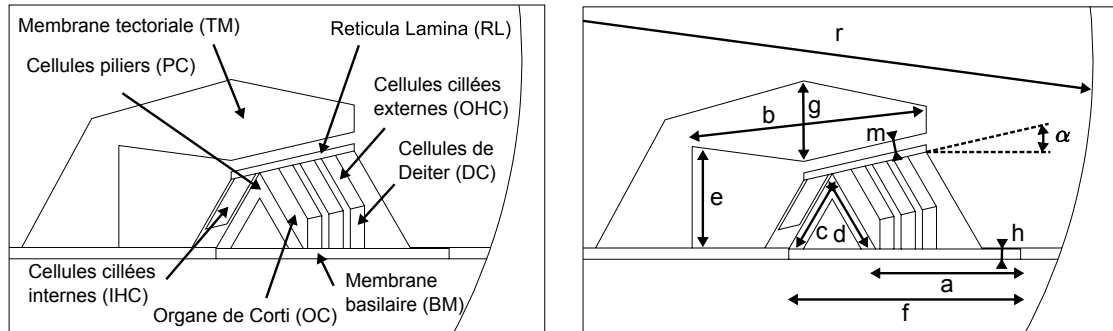
Le modèle WKB-EF est cohérent avec la méthode WKB classique. La méthode WKB-EF permet d'étendre la résolution du problème à toute section de guide d'onde, contrairement à la méthode WKB classique qui se limite à des sections à la géométrie simple.

### 4.3 Application à la section de l'organe de Corti

La méthode décrite et validée à la section 4.2 permet de trouver les nombres d'onde et les modes propres associés pour la section d'un guide d'onde couplant fluide et structure dans des domaines à la géométrie arbitraire. Ce modèle est adapté à la recherche du mode de propagation d'onde de la membrane tectoriale suggéré à la section 4.1. Une méthode similaire est utilisée par Cai et Chadwick [12, 9, 10].

#### 4.3.1 Géométrie de la section radiale

Le modèle WKB-EF est appliqué à une section de cochlée comprenant les détails de l'organe de Corti (voir figure 4.14a). La géométrie de la section est construite à l'aide de



(a) Section transverse montrant les différents éléments de l'organe de Corti. Le modèle proposé comprend la membrane basilaire (BM), la membrane tectoriale (TM), les cellules piliers (PC), les cellules de Deiter (DC), les tissus de l'organe de Corti (OC), les canaux cochléaires (FD), la reticula lamina (RL), les cellules ciliées internes (IHC) et les cellules ciliées externes (OHC).

(b) Paramètres utilisés pour décrire la géométrie de l'organe de Corti. Les dimensions sont adaptées de [33]. (a) largeur de la membrane basilaire (pectinate zone); (b) largeur de la membrane tectoriale; (c) hauteur de la cellule pilier interne; (d) hauteur de la cellule pilier externe; (e) hauteur du sulcus interne; (f) largeur de flexion de la membrane basilaire; (g) épaisseur de la membrane tectoriale; (h) épaisseur de la membrane basilaire; (m) hauteur de l'espace subtectorial; (r) Rayon du canal cochléaire; ( $\alpha$ ) angle d'inclinaison de la reticula lamina.

FIGURE 4.14 – Description de la géométrie de la section utilisée dans le modèle couplant la méthode WKB avec la méthode des éléments finis pour la représentation des modes transverses de l'organe de Corti.

segments de droites. Cela permet de paramétrer la section et de la définir avec un nombre

réduit de paramètres (voir figure 4.14b). Chacun des paramètres est défini en fonction de la position longitudinale  $z$  de la section. La méthode de mesure développée par Edge et al. [33] fournit des données morphologiques à partir des observations de trois sections transverses de la cochlée d'une gerbille mongolienne. La cochlée et l'organe de Corti sont extraits de l'animal et replongés dans des fluides aux caractéristiques similaires aux fluides cochléaires. La première section observée se situe à la base de la cochlée, tandis que la seconde est dans le tour intermédiaire et la troisième à l'apex. Les paramètres sont linéarisés et interpolés entre ces trois sections. Les données manquantes sont choisies arbitrairement afin de constituer une section réaliste. Cinquante sections sont créées mais seulement cinq de ces sections sont représentées sur la figure 4.15. Les sections sont directement créées

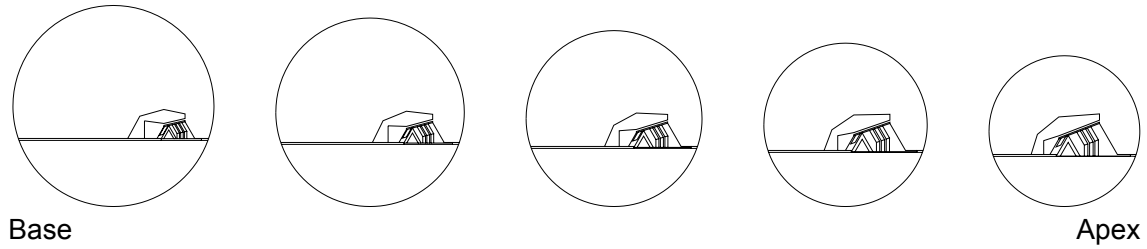


FIGURE 4.15 – Cinq sections transverses de la base jusqu'à l'apex.

et paramétrées dans le logiciel COMSOL Multiphysics®. La partie libre de la membrane basilaire (définie par la longueur ( $f$ ) sur la figure 4.14b) et son épaisseur ( $h$ ) sont les principales caractéristiques jouant un rôle pour la tonotopie. Elles influent directement sur la raideur de la membrane basilaire. La membrane basilaire est étroite pour les premières sections, proches de la base, et plus large pour les dernières sections, proches de l'apex. L'épaisseur de la membrane basilaire mesuré par Edge, correspond à l'épaisseur au centre de la membrane basilaire. La géométrie de la section de la membrane basilaire a la forme d'un segment circulaire [59] et l'épaisseur mesurée au centre ne peut être utilisée comme épaisseur pour la représentation par une section rectangulaire. De plus, la rigidité de la membrane basilaire dépend d'autres paramètres qui ne sont pas représentés ici (densité de fibre, rigidité de l'arche de Corti [53]). L'épaisseur de la membrane basilaire est déterminée plus loin en ajustant sa valeur par comparaison des résultats obtenus avec des mesures expérimentales (voir section 4.3.3.1).

Les autres éléments de l'organe de Corti ont une inertie qui fait également varier la fréquence de réponse de l'ensemble. La taille du domaine de l'organe de Corti et son inertie augmentent en se rapprochant de l'apex alors que le rayon des canaux cochléaires se réduit.

### 4.3.2 Paramètres matériaux

Le domaine solide est composée de matériaux aux caractéristiques différentes. Ces caractéristiques sont considérées comme constantes pour toutes les sections transverses. Les modules de Young sont adaptés de la littérature [9] (voir table 4.3). Les solides composant l'organe de Corti sont représentés par un modèle viscoélastique. Le solide de Kelvin-Voigt permet d'obtenir un coefficient d'amortissement proportionnel à la fréquence. Ce choix est utile pour les simulations à haute fréquence car il permet d'atténuer les vibrations parasites locales pour faire ressortir les modes globaux. Le module de Young est donc de

Paramètres	Symbole	Unité	Base	Apex
Largeur de la membrane basilaire	a	[mm]	0,1	0,2
Épaisseur de la membrane basilaire	h	[mm]	0,007	0,0015
Largeur de la membrane tectoriale	b	[mm]	0,18	0,27
Hauteur de la cellule pilier interne	c	[mm]	0,06	0,095
Hauteur de la cellule pilier externe	d	[mm]	0,06	0,095
Hauteur du sulcus interne	e	[mm]	0,077	0,077
Largeur de flexion	f	[mm]	0,16	0,295
Épaisseur de la membrane tectoriale	g	[mm]	0,037	0,056
Rayon des canaux	r	[mm]	0,4	0,3
Hauteur de l'espace subtectorial	m	[mm]	0,008	0,008
Inclinaison de la reticula lamina	$\alpha$	[°]	13	21

TABLE 4.2 – Valeur des paramètres utilisés pour décrire la géométrie de la section de l'organe de Corti. Ces paramètres sont adaptés de [33].

la forme :

$$E = E_m (1 + i\omega\eta_v) \quad (4.44)$$

où  $E_m$  est le module de Young réel du matériau  $m$ , défini dans la table 4.3,  $\eta_v$  est le coefficient d'amortissement du matériau. Ce choix correspond également à la réalité physique des matériaux de l'organe de Corti qui sont proches de gels viscoélastiques.

Paramètres	Symbole	Unité	Valeur
Masse volumique BM	$\rho_{BM}$	[kg.m <sup>-3</sup> ]	1000
Masse volumique (TM, OC, RL, PC, DC, HC)	$\rho_s$	[kg.m <sup>-3</sup> ]	1000
Masse volumique fluide	$\rho_f$	[kg.m <sup>-3</sup> ]	1000
Module de Young BM	$E_{BM}$	[Pa]	$2 \times 10^8$
Coefficient d'amortissement structural	$\eta_v$	[1]	$5 \times 10^{-7}$
Coefficient de Poisson BM	$\nu_{BM}$	[1]	0,3
Module de Young TM	$E_{TM}$	[Pa]	$2 \times 10^6$
Coefficient de Poisson TM	$\nu_{TM}$	[1]	0,49
Module de Young OC	$E_{OC}$	[Pa]	$2 \times 10^6$
Module de Young OHC	$E_{OHC}$	[Pa]	$12 \times 10^6$
Module de Young IHC	$E_{IHC}$	[Pa]	$12 \times 10^6$
Module de Young RL	$E_{RL}$	[Pa]	$16 \times 10^6$
Module de Young PC	$E_{PC}$	[Pa]	$16 \times 10^6$
Module de Young DC	$E_{DC}$	[Pa]	$2 \times 10^6$

TABLE 4.3 – Paramètres des matériaux de l'organe de Corti. Ces paramètres sont adaptés de [9]. Les modules de Young des matériaux de l'organe de Corti sont augmentés afin d'ajuster la longueur d'onde de la réponse aux mesures expérimentales de Olson.

### 4.3.3 Hypothèses

La méthode développée à la section 4.2 pour les guides d'onde inhomogènes est appliquée à la section de l'organe de Corti. Les conditions limites à l'interface entre le fluide et

le solide sont similaires à celles définies à la section 4.2.4.3. Aucune dissipation n'est prise en compte à la frontière fluide structure et dans le domaine fluide.

Des conditions aux limites supplémentaires sont nécessaires pour représenter la physique de l'espace subtectorial. Les touffes de cils immergées qui s'y trouvent représentent un système couplé fluide structure complexe [4, 65] dont le comportement est ici simplifié. Chadwick et al. [17] montrent que la différence de pression entre les parois supérieure et inférieure de l'espace subtectorial est faible. Par conséquent, l'espace subtectorial ne s'ouvre pas. Le déplacement normal des points de la paroi de la membrane tectoriale est imposé égal à celui des points de la reticula lamina (voir figure 4.16a). Afin de représenter la raideur en flexion des touffes de cils, une force tangentielle  $F_{st}$  proportionnelle à la différence de déplacement tangentiel entre la reticula lamina ( $v_{tRL}$ ) et la membrane tectoriale ( $v_{tTM}$ ) est appliquée sur les parois des deux solides.

$$F_{st} = -S_{st} (v_{tRL} - v_{tTM}) \quad (4.45)$$

La raideur équivalente est  $S_{st} = 1 \times 10^{10} [N.m^{-3}]$ . Le choix de cette valeur est justifié plus loin.

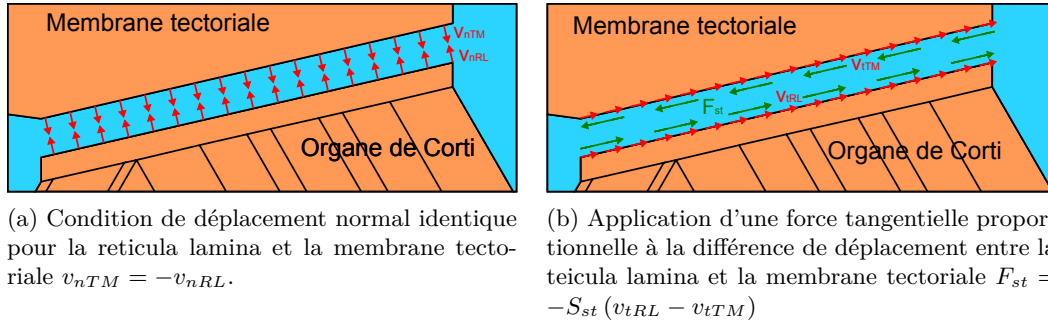
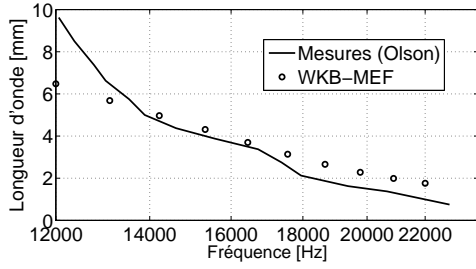


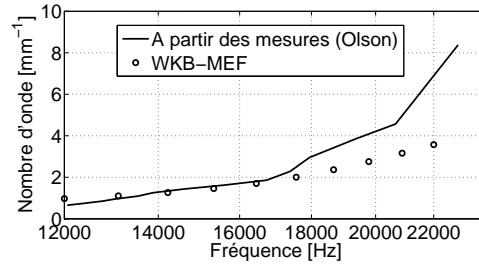
FIGURE 4.16 – Représentation simplifiée de la physique de l'espace subtectorial.

#### 4.3.3.1 Longueurs d'onde et nombres d'onde

Olson [103] réalise des mesures de champ de pression *in vivo* dans la cochlée d'une gerbille mongolienne. Plusieurs caractéristiques de la vibration en sont déduites. La phase de vibration est mesurée pour plusieurs fréquences en deux points distants de  $\sim 1,8$  mm. La longueur d'onde en un point intermédiaire est estimée par la variation de phase entre ces deux points divisés par la distance qui les sépare. Une courbe est obtenue pour un point situé à  $\sim 0,9$  mm de la base (voir figure 4.17). Puisque les mesures sont réalisées *in vivo*, le retour actif de l'organe de Corti est supposé influencer sur l'amplitude de réponse mais peu sur la phase et la longueur d'onde. Les racines sont tracées sur la plage de fréquence [12000 – 24000 Hz] pour le mode de flexion de la membrane basilaire (voir figure 4.18a). Ce mode couple un mouvement de flexion de la membrane basilaire et un mouvement de cisaillement de la membrane tectoriale (voir section 4.3.3.2). L'interaction avec la membrane tectoriale est mise en évidence lorsque la raideur équivalente des cellules cillées est modifiée. Le tracé des racines subit un décalage dû à l'influence de la membrane tectoriale apparaît. Les lieux des racines (en fonction de la position  $z$  le long du guide d'onde) sont tracés sur la figure 4.18b.

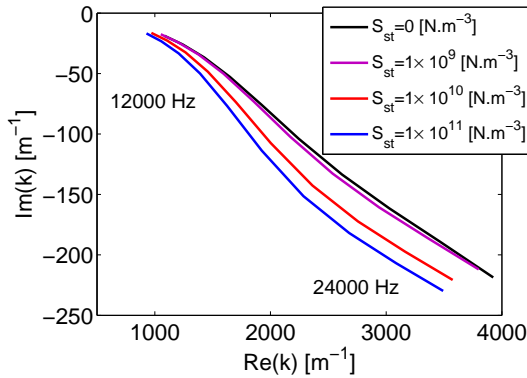


(a) Comparaison des longueurs d'onde mesurées expérimentalement [103] et trouvées numériquement avec la méthode WKB-EF.

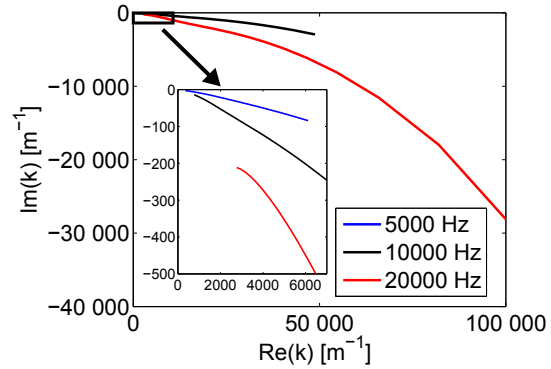


(b) Comparaison des nombres d'onde déduits des mesures et trouvés numériquement avec la méthode WKB-EF.

FIGURE 4.17 – Longueurs d'onde mesurées par Olson [103] et nombres d'onde déduits. Comparaison aux résultats obtenus avec la méthode WKB-EF.



(a) Racines en fonction de la fréquence (de 12000 Hz à 24000 Hz), à  $z = 0,9$  mm, pour le mode de flexion de la membrane basilaire pour différentes valeurs de la raideur équivalente des cils  $S_{st}$ .



(b) Lieux des racines pour trois fréquences (5000, 10000 et 20000 Hz).

FIGURE 4.18 – Lieux des racines obtenus par la méthode WKB-EF.

#### 4.3.3.2 Modes propres

Le calcul par la méthode WKB-EF permet de déterminer à chacun des nombres un mode de propagation couplant un champ de pression et le déplacement structural associé.

#### Champs de pression

Deux cas principaux sont distingués :

- A basse fréquence, le champ de pression est presque uniforme dans les deux canaux (voir figure 4.19a). Le déplacement de la structure entraîne un déplacement synchrone de toute la section de fluide le long de la direction  $z$  (hors-plan).
- A haute fréquence, le champ de pression admet un fort gradient dans une zone proche de la structure de la membrane basilaire (voir figure 4.19b). Le champ de pression est quasiment nul et constant dans le reste de la section. La hauteur de fluide équivalente est alors réduite.

Olson [103] mesure également la pression en fonction de la distance à la membrane basilaire. Un gradient de pression est observé sur une plage fréquentielle proche de la fréquence



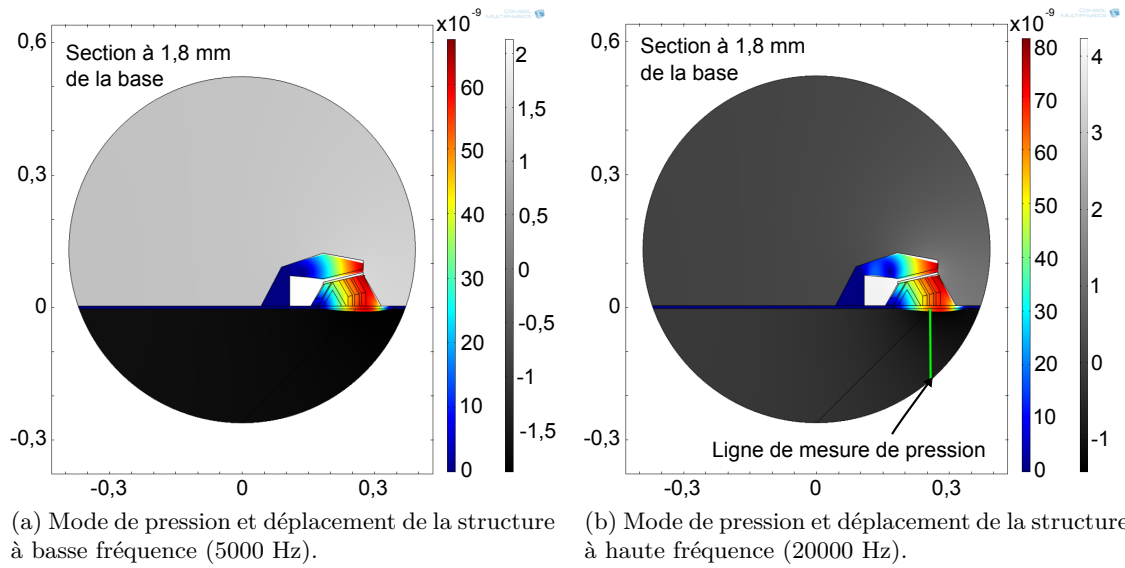


FIGURE 4.19 – Champs de pression et déplacement de la structure calculé par la méthode WKB-EF à 1,8 mm de la base.

caractéristique (20 kHz pour le point dans le premier tour à  $\sim 1,8$  mm de la base). Les résultats sont comparés pour les mesures avec une excitation à 80 dB qui correspond à la zone où la cochlée devient linéaire. Le champ de pression est relevé sur une ligne

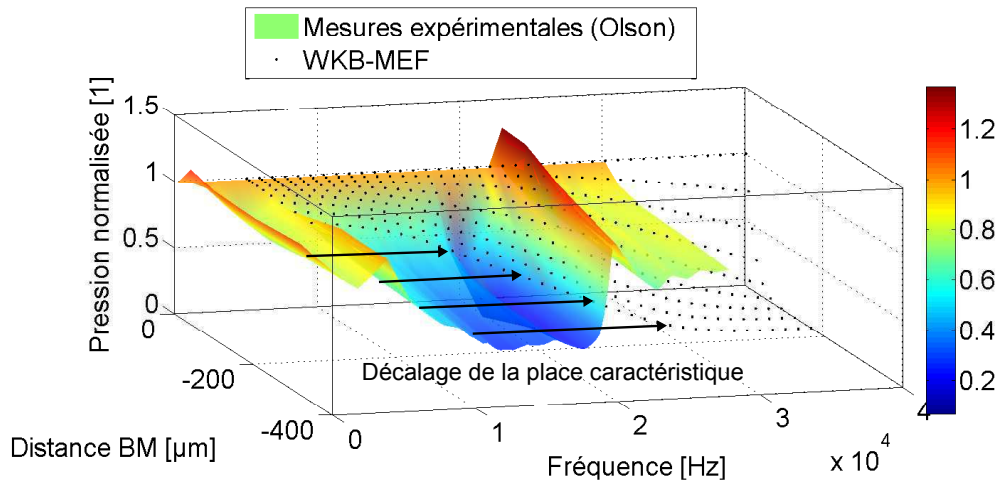


FIGURE 4.20 – Modes de pression normés en fonction de la fréquence à 1,8 mm de la base.

verticale (voir figure 4.19b) et normée par rapport à la pression à l'interface fluide structure. Ce procédé, effectué pour plusieurs fréquences, permet d'observer la forme du champ de pression dans la hauteur du canal. Le comportement est similaire à la surface obtenue expérimentalement (voir figure 4.20). A basse fréquence, le champ de pression est constant et varie fortement à la place caractéristique. Finalement, il atteint une valeur constante nulle sur quasiment toute la hauteur du canal. Cette comparaison montre que la place

caractéristique du modèle est décalée et se trouve proche de 30000 Hz pour le modèle WKB-EF. Ce décalage peut également être observé sur les courbes comparatives des longueurs d'onde et des nombres d'onde (voir figure 4.17). Les valeurs sont quasiment identiques sur toute la gamme de fréquence mais le comportement est linéaire avec la fréquence alors que le nombre d'onde mesuré expérimentalement montre une variation exponentielle correspondant à la place caractéristique. Cela montre que le modèle permet de représenter qualitativement la cochlée mais que la comparaison quantitative nécessite un travail de réglage des paramètres du modèle.

La zone sous la membrane tectoriale présente une forte surpression. Ce phénomène, suggéré par Steele [126], vient du fait que la modélisation par une cavité fermée ne correspond pas à la géométrie tridimensionnelle de l'organe de Corti. Les cellules piliers sont espacées dans la direction  $z$  et le fluide peut s'engouffrer dans le tunnel de Corti (zone sous les cellules piliers). Plusieurs auteurs étudient ce phénomène et proposent le couplage d'un mode fluide dans le tunnel de Corti avec le mode principal de vibration de la membrane basilaire [152, 30].

### Déplacement structural

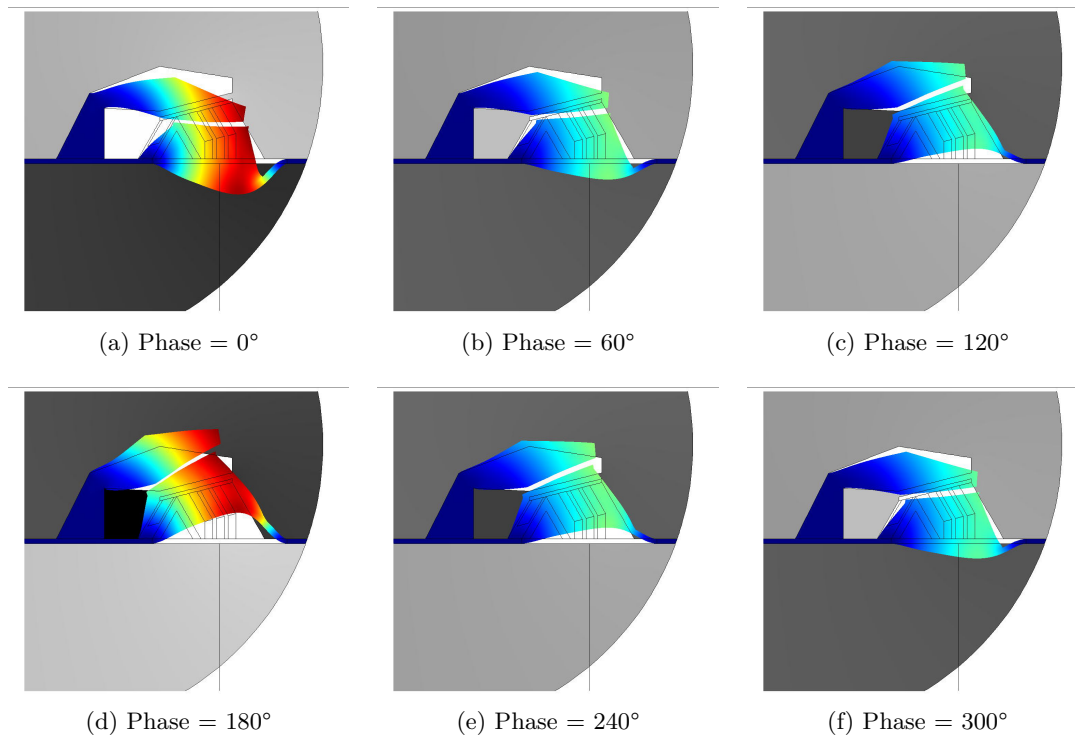


FIGURE 4.21 – Mode de flexion de la membrane basilaire associé à un mouvement de cisaillement entre la reticula lamina et la membrane tectoriale à 10000 Hz à 1,8 mm de la base. L'échelle de couleur représente le déplacement total du solide et l'échelle de gris représente le champ de pression.

Le déplacement du solide correspond principalement à une déformation en flexion de la membrane basilaire (voir figure 4.21). Ce mouvement a pour conséquence de déplacement l'ensemble de l'organe de Corti. La condition de glissement impose à la membrane tectoriale de se déplacer également simultanément. Un léger mouvement de cisaillement apparaît

entre la reticula lamina et la membrane tectoriale. Ce mouvement est cohérent avec la cinématique décrite par Dallos [25].

#### 4.3.4 Couplage mécanique longitudinal

Le couplage mécanique longitudinal dans la cochlée est un paramètre important de la mécanique cochléaire. Plusieurs modèles de structure peuvent être pris en compte pour représenter la membrane basilaire (voir section 2.2.1). Un couplage mécanique de type plaque en flexion pour la membrane basilaire a été intégré dans le modèle couplé WKB-EF. Les résultats ont été présentés à la conférence Mechanics of Hearing [37]. Cai et Chadwick utilise également une plaque orthotropique pour représenter la membrane basilaire avec un module de Young longitudinal faible devant le module de Young transverse. Avec un fort ratio d'orthotropie, le couplage longitudinal de flexion a peu d'effet sur le nombre d'onde avant la place caractéristique.

Dans cette section, un couplage mécanique est introduit dans la membrane tectoriale.

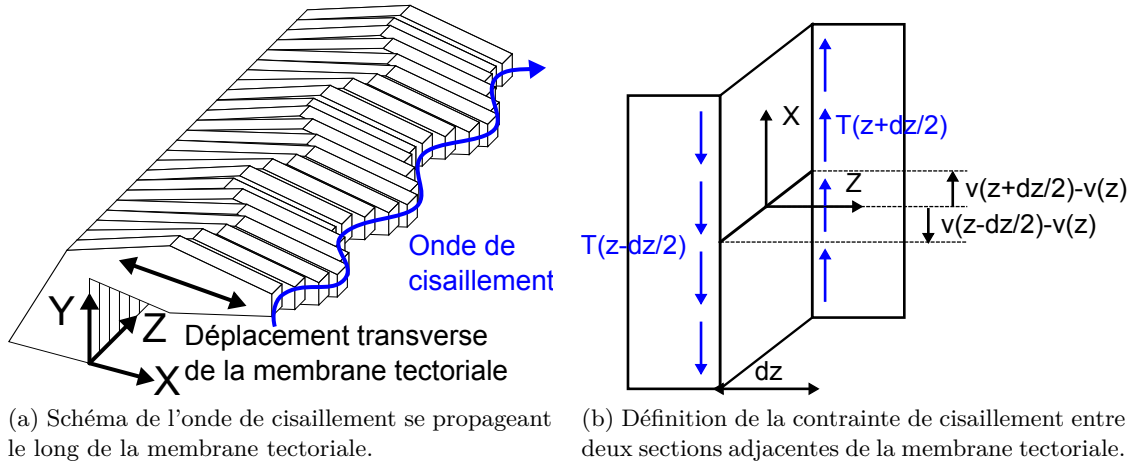


FIGURE 4.22 – Couplage mécanique longitudinal de la membrane tectoriale.

Chacune des sections de la membrane tectoriale est reliée aux sections adjacentes par un effort de cisaillement (voir figure 4.22b). La contrainte de cisaillement  $T$  exprimée dans le solide est définie par la relation :

$$T(z + dz/2) = G \frac{(v(z + dz/2) - v(z))}{dz/2} \quad (4.46)$$

où  $G$  est le module de cisaillement du matériau défini par :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.47)$$

Les contraintes dans les plans à  $z - dz/2$  et  $z + dz/2$  sont appliquées sur la tranche d'épaisseur  $dz$ . L'équation dynamique de la tranche s'écrit alors :

$$\rho_s dz dA \frac{\partial^2 v(z)}{\partial t^2} = G dA \left( \frac{\partial v(z + dz/2)}{\partial z} - \frac{\partial v(z - dz/2)}{\partial z} \right) \quad (4.48)$$

où  $dA$  est l'aire élémentaire considérée. Dans un régime harmonique et à l'ordre  $\epsilon^0$ , les dérivées sont simplifiées et l'équation 4.48 peut s'écrire :

$$-\rho_s \omega^2 v(z) = -k^2 G v(z) \quad (4.49)$$

Le cisaillement est supposé constant sur toute la surface de la membrane tectoriale et un chargement surfacique proportionnel au déplacement et au carré du nombre d'onde  $k^2$  est appliqué sur toute la surface de la membrane tectoriale. L'ajout de cette raideur qui dépend du nombre d'onde a pour effet de modifier le lieu des racines (voir figure 4.24). La membrane tectoriale est rigidifiée et par conséquent, l'ensemble de l'organe de Corti est plus rigide. Un nouveau mode correspondant au déplacement recherché apparaît (voir figure 4.23). Son nombre d'onde le classe parmi les modes évanescents mais le modèle développé au chapitre 3 montre que les modes évanescents peuvent avoir une influence sur les modes propagatifs.

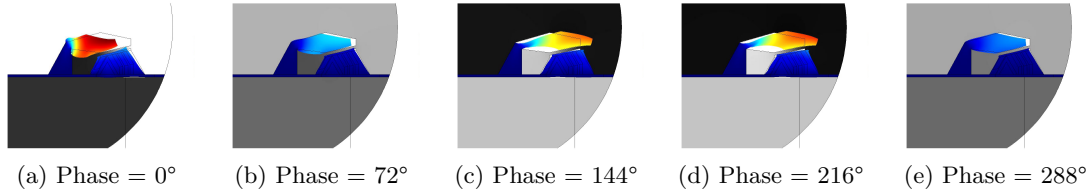


FIGURE 4.23 – Mode évanescent de cisaillement de la membrane tectoriale à 10000 Hz à 1,8 mm de la base.

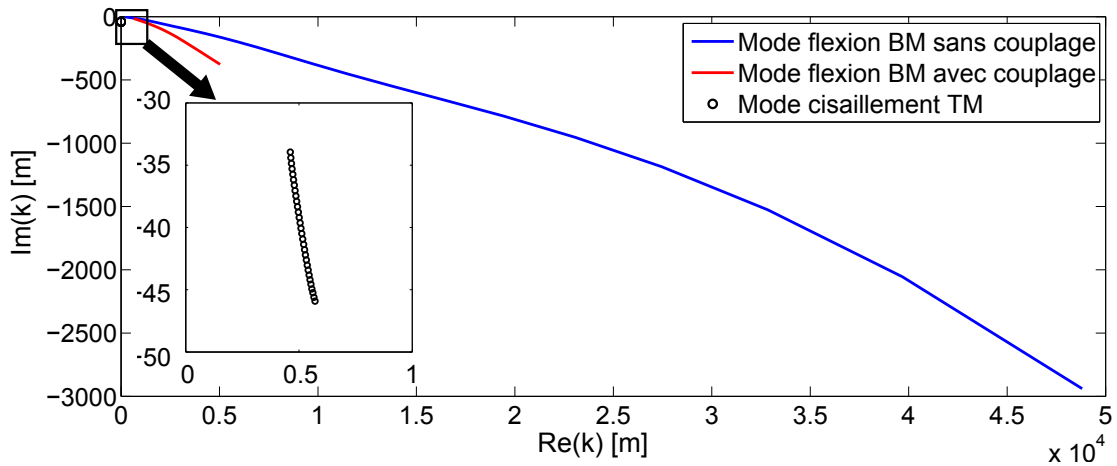


FIGURE 4.24 – Lieux des racines pour le mode en flexion de la membrane basilaire avec et sans le couplage mécanique longitudinal dans la membrane tectoriale.

## 4.4 Conclusion

L'étude présentée dans ce chapitre propose une approche pour déterminer les modes transverses de l'organe de Corti et en particulier le mode de cisaillement de la membrane basilaire. Un modèle discret à deux degrés de liberté montre que deux ondes peuvent interagir et provoquer une stimulation accrue des cellules cillées. La première onde est classiquement déterminée par des modèles comme celui développé au chapitre 3.

Pour déterminer les caractéristiques de la deuxième onde, un modèle est développé permettant de coupler la méthode WKB à la méthodes des éléments finis. L'intérêt est d'utiliser la méthode des éléments finis uniquement dans un plan et de réduire ainsi le coût de calcul.

Cette méthode est d'abord validée par comparaison avec les modèle analytique développé au chapitre 3.

Elle est ensuite appliquée afin de déterminer les modes d'une section de l'organe de Corti. Le premier mode de flexion de la membrane basilaire associé à un mouvement de cisaillement de la membrane tectoriale est identifié. Les paramètres du modèle sont recalés par rapport aux mesures expérimentales relevées dans la littérature. Un couplage longitudinal est ensuite introduit sous la forme d'un cisaillement de la membrane tectoriale. Ce couplage fait apparaître un mode évanescent de cisaillement de la membrane tectoriale.

Le modèle développé dans cette partie présente un fort intérêt pour décrire la mécanique passive de l'organe de Corti. La méthode appliquée au chapitre 3 pour déterminer le couplage du mode propagatif avec les modes évanescents est adaptable à ce modèle.



## Chapitre 5

# Observation d'ondes sur un banc d'essai inspiré des cochlées artificielles

Ce chapitre décrit la mise en œuvre expérimentale d'un guide d'onde inhomogène reproduisant la tonotopie de la cochlée. Dans un premier temps, le concept des cochlées artificielles est présenté. Ensuite, le principe de l'expérience est détaillé. Un trou noir acoustique est utilisé en terminaison anéchoïque afin de réduire les interférences entre ondes incidentes et réfléchies. La méthode WKB, décrite au chapitre 3, est appliquée à la modélisation du trou noir acoustique immergé. La conception du banc d'essai est expliquée ainsi que les moyens d'essai utilisés. Enfin, les résultats sont donnés pour une fréquence fixée et sur l'ensemble du spectre fréquentiel. Les cartes tonotopiques expérimentales sont comparées aux cartes théoriques.

### 5.1 Les cochlées artificielles

Plusieurs types de systèmes artificiels tentent de reproduire le fonctionnement de l'oreille interne. Le terme de « cochlée artificielle » désigne l'ensemble des maquettes expérimentales reprenant le principe mécanique de selectivité spatio-fréquentielle de la cochlée. Von Békésy [139, 138] a été l'un des premiers à tenter de reproduire le comportement la cochlée par une série de pendules couplées entre eux. Helle [50] et Canell [15] ont construits des guides d'ondes de type cochléaire de grande échelle. Lechner [72] a introduit un phénomène actif sur son prototype. Plus récemment, Grosh et White [148, 147, 145] ont étudié et construit une maquette à l'échelle de la cochlée humaine.

L'équivalence entre les circuits électriques et les systèmes mécaniques discrets ont également permis de développer des cochlées « électroniques » [79, 140]. Le principal intérêt est de pouvoir implémenter des modèles non-linéaires afin de reproduire la réponse de la cochlée active [144, 143, 48]. Le principal inconvénient est que les circuits électroniques consomment une quantité d'énergie relativement importante. Cette approche n'est donc pas toujours judicieuse lorsque la finalité est l'implant cochléaire. Au contraire, les systèmes purement mécaniques copient exactement le principe de la cochlée puisque qu'aucune énergie extérieure n'est nécessaire au fonctionnement (du moins dans le cas passif).

Les applications des cochlées artificielles sont multiples. Tout d'abord, l'objectif des cochlées artificielles est de remplacer une cochlée défaillante. Lorsque des pathologies ou un traumatisme touchent les cellules sensibles de l'oreille interne (cellules cillées internes ou

externes), le lien entre la vibration de membrane basilaire et le nerf auditif est coupé ou altéré. L'objectif est de remplacer la membrane basilaire par un dispositif rétablissant ce lien. En plus de la vibration mécanique, il est nécessaire d'ajouter un composant permettant de transformer l'énergie mécanique de la vibration en énergie électrique détectée par le nerf auditif. Les défis technologiques sont énormes et la première implantation n'a pas été encore réalisée mais certains groupes travaillent sur ce sujet [3, 121, 122].

Le second but est de réaliser, par l'intermédiaire des cochlées artificielles, des capteurs acoustiques aux performances améliorées [145, 146]. L'oreille humaine permet de distinguer des sons sur une gamme de fréquence et une gamme d'amplitude très importantes. Un capteur ayant les mêmes caractéristiques que l'oreille humaine serait très utile dans beaucoup de domaines. La conception d'un capteur acoustique s'inspirant de la cochlée pourra être optimisée en fonction des performances visées.

Enfin, chercher à reproduire ce qui se produit dans l'oreille interne est en soi un challenge. Afin de relever ce challenge, des études approfondies sont nécessaires et permettent d'augmenter la compréhension du fonctionnement de la cochlée. Certains paramètres utilisés dans les modèles ne sont pas facile d'accès. Il est par exemple relativement difficile de mesurer ou d'estimer le module de Young des matériaux constituant les composants de l'organe de Corti. Les cochlées artificielles étant réalisées à partir de matériaux connus et caractérisables, les informations obtenues sont précieuses car elles permettent de valider les modèles à l'aide de paramètres fiables. De la même façon, les mesures *in vivo* présentent de nombreuses contraintes et toutes les observations ne sont pas réalisables.

## 5.2 Principe de l'expérience

La cochlée artificielle est un guide d'onde couplant une structure à un fluide (lourd ou non). Ce guide d'onde possède une qualité particulière puisque lorsqu'il est soumis à une excitation dynamique, la réponse est localisée à un endroit dépendant de la fréquence du signal d'entrée. La relation position-fréquence ainsi créée s'appelle la « tonotopie » et constitue l'objectif premier de la cochlée artificielle. Le point de départ est de créer un guide d'onde inhomogène dont les paramètres varient lentement. Grâce à la variation des paramètres, la réponse du guide d'onde à une excitation varie également dans la longueur. Pour une fréquence donnée, la réponse présente un maximum pour une configuration particulière des paramètres et donc pour une position le long du guide d'onde. Pour une fréquence différente de la première, une autre configuration des paramètres et donc une autre position sera le lieu de vibration maximum. La variation des paramètres du guide d'onde s'accompagne d'une variation de la longueur d'onde. La relation entre la fréquence et la longueur d'onde s'appelle la relation de dispersion [149] et permet de définir le guide d'onde.

Ce principe est repris dans toutes les expériences de cochlées artificielles. Une onde propagative est générée par une excitation à une extrémité du guide d'onde. Les guides d'ondes se terminent par une condition d'encastrement ou un bord libre. Ainsi, l'onde se propageant jusqu'à la terminaison du guide d'onde est réfléchiée par ces conditions aux limites. L'onde réfléchiée ainsi créée interfère avec l'onde incidente, créant des ondes stationnaires. Ainsi, la courbe enveloppe n'a plus un seul pic mais plusieurs, correspondant aux lobes créés par la superposition des deux ondes (voir figure 3.8). La détection de la vibration maximale et surtout la localisation du point maximum peut être perturbée par ce phénomène. Dans la cochlée, les ondes incidentes atteignent rarement l'extrémité du guide d'onde car une grande quantité d'énergie est dissipée dans l'espace subtectoral. Aucune onde réfléchiée n'est créée à l'hélicotrema [27]. Des ondes réfléchies existent bien dans la cochlée, même si



leur origine n'est pas clairement identifiée [119]. Elles ne sont pas produites par une réflexion à l'apex mais sont probablement issues de l'amplificateur cochléaire. Dans les cochlées artificielles, il est difficile de reproduire la géométrie de l'organe de Corti responsable de l'atténuation de la propagation des ondes. Il est toujours possible d'accroître le facteur d'atténuation des ondes en remplissant les canaux par un fluide à la viscosité importante [147]. Les ondes stationnaires disparaissent alors mais le système est très amorti et une partie de l'intérêt des cochlées artificielles est perdu. L'idée présentée dans ce chapitre est d'utiliser un guide d'onde plongé dans un fluide à la viscosité faible mais de réduire au maximum la réflexion des ondes à l'extrémité de ce guide. Ainsi, la propagation des ondes n'est pas perturbée sur la longueur du guide d'onde, ni par un amortissement prépondérant, ni par les ondes réfléchies.

Un guide d'ondes de section variable est conçu afin de reproduire une tonotopie (voir

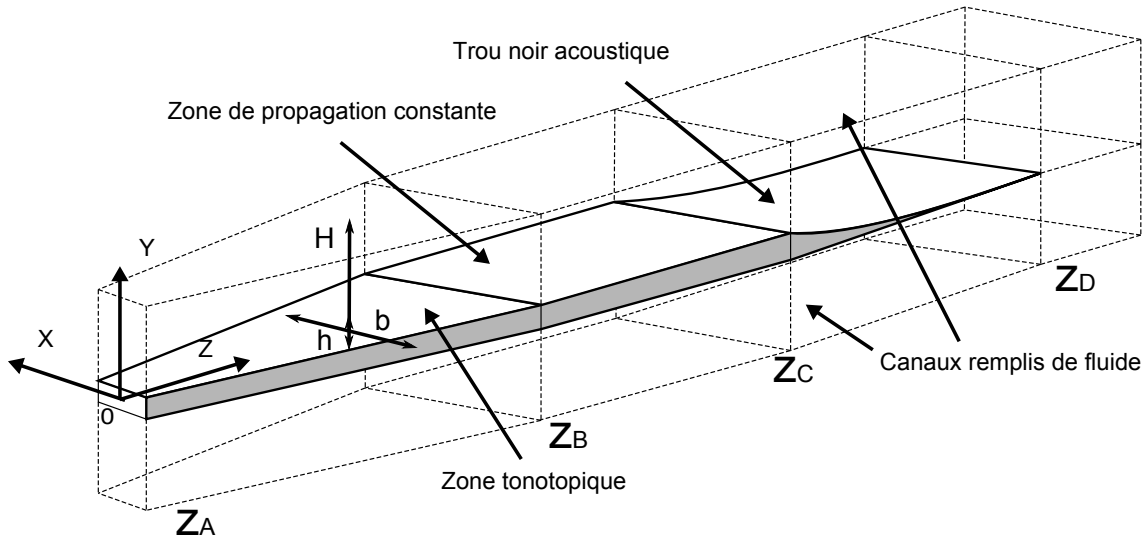


FIGURE 5.1 – Géométrie du guide d'onde inspiré des cochlées artificielles.

figure 5.1). Trois zones sont définies : la zone tonotopique allant de l'abscisse  $z_A$  à l'abscisse  $z_B$ , la zone de section constante allant de l'abscisse  $z_B$  à l'abscisse  $z_C$  et enfin le trou noir acoustique allant de l'abscisse  $z_C$  à l'abscisse  $z_D$ . Il est considéré que la zone de section constante n'influe pas sur la propagation des ondes. Afin de réaliser l'atténuation des ondes au bout du guide d'onde, un trou noir acoustique est utilisé en tant que terminaison anéchoïque.

Le Trou Noir Acoustique (TNA) est un moyen efficace de contrôle passif des structures minces. Le principe est mis en évidence et exploré par Mironov [94]. Le procédé est modélisé et testé expérimentalement sur des poutres en flexion [66], sur des plaques en flexion rectangulaires [101, 67, 101, 5] et sur des plaques elliptiques [39, 40]. Le dimensionnement du trou noir acoustique répond à des règles d'optimisation afin de permettre un gain de masse sur la structure initiale [22]. Le trou noir acoustique présente de bonnes qualités d'amortissement pour les moyennes et hautes fréquences. Le modèle développé par Georgiev [39] permet de représenter le trou noir acoustique dans le vide. Aucun modèle du trou noir acoustique immergé dans un fluide n'existe dans la littérature. Ici, le trou noir acoustique est immergé entre deux couches d'eau et l'approche pour le modéliser est nouvelle. Le modèle WKB décrit dans le chapitre 3 est appliqué à la géométrie du trou noir acoustique pour estimer son efficacité. Son rôle est ici de réduire la réflexion des ondes provenant de la zone tonotopique.

### 5.3 Conception de la zone tonotopique

Le banc d'essai est conçu et réalisé en collaboration avec le Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine. La conception de la zone tonotopique du banc d'essai est basée sur le modèle décrit dans le chapitre 3. La zone tonotopique est une plaque de largeur variable et d'épaisseur constante immergée entre deux canaux remplis de fluide (voir figure 5.2). La méthode WKB permet de décrire la propagation d'une onde le long d'un guide d'onde inhomogène si la variation des paramètres est suffisamment lente. La plupart des paramètres introduit dans le modèle peuvent être choisis arbitrairement. Ils sont au moins connus avec une assez bonne certitude. Il est donc relativement aisé de choisir les paramètres afin d'obtenir la réponse désirée. Cependant, certaines contraintes ne peuvent être contournées.

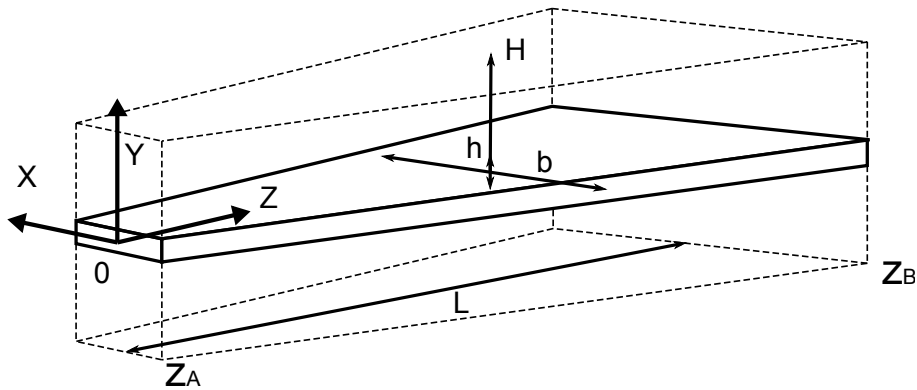


FIGURE 5.2 – Géométrie « box model » de la zone tonotopique.

#### 5.3.1 Contraintes de conception

Les choix du matériau et de l'épaisseur de la plaque sont liés à la réalisation du trou noir acoustique (voir section 5.4.3). La plaque est en aluminium et l'épaisseur de la plaque est de 1 mm. À partir de cette épaisseur, il est possible de déterminer la réponse en fréquence en fonction de la largeur du guide d'onde. Pour une largeur donnée, la section correspondante répondra préférentiellement à une fréquence particulière (voir figure 5.3). Pour une même constante d'énergie  $C_z$  (voir équation 3.53), la réponse de la section est calculée sur une large plage de fréquence. Le pic de réponse correspond à la fréquence caractéristique de la section. Ainsi, deux largeurs sont choisies et déterminent la plage de fréquence de réponse de la zone tonotopique. Le choix de ces largeurs est réalisé en fonction de la zone fréquentielle visée. La plage de fréquence est très large dans le cas de la cochlée car plusieurs paramètres (largeur de la membrane basilaire, épaisseur de la membrane basilaire, densité de fibres) font varier la souplesse de la membrane basilaire de façon exponentielle. Une telle variation avec des matériaux artificiels est difficile et peu répétable. La plage de fréquence visée est donc réduite. Le but est d'obtenir une réponse en fréquence comprise entre 0,4 kHz et 5 kHz pour le cas de la plaque immergée dans l'eau. Cette plage de fréquence est choisie car elle est incluse dans la gamme d'audition humaine et beaucoup de sons sont situés dans cette gamme. Afin de s'assurer que le premier mode de flexion transverse est principalement sollicité lors de la vibration de la plaque, le point d'excitation de la plaque est situé sur la ligne médiane de la plaque. De plus, il est possible de calculer les fréquences de réponse du deuxième mode transverse. Dans le modèle utilisé, la structure est supposée se déformer suivant le premier mode de flexion

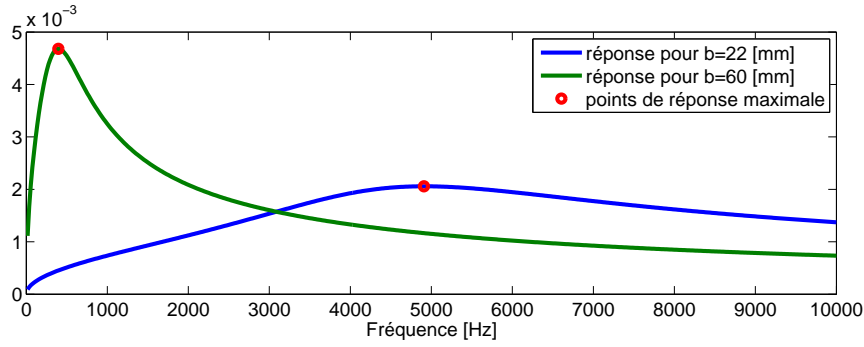


FIGURE 5.3 – Détermination de la fréquence de réponse en fonction de la largeur de la section pour une épaisseur constante.

d'une poutre encastree à ses deux extrémités. Le calcul peut également être réalisé en supposant que la poutre subit une déformation d'un mode d'ordre supérieur. Le deuxième mode de la fonction de forme de l'équation (3.37) est utilisé :

$$v(x) = \alpha_2 \cos(\lambda_2 \frac{x}{b}) + \beta_2 \cosh(\lambda_2 \frac{x}{b}) + \gamma_2 \sin(\lambda_2 \frac{x}{b}) + \delta_2 \sinh(\lambda_m \frac{x}{b}) \quad (5.1)$$

où  $\alpha_2 = 0$ ,  $\beta_2 = 0$ ,  $\gamma_2 = -0.9374$ ,  $\delta_2 = -0.0261$  et  $\lambda_2 = 7.853$ . Ces constantes permettent d'obtenir la déformée unitaire du deuxième mode en flexion d'une poutre encastree-encastree (voir figure 5.4). Le développement du calcul est en tout point similaire à celui

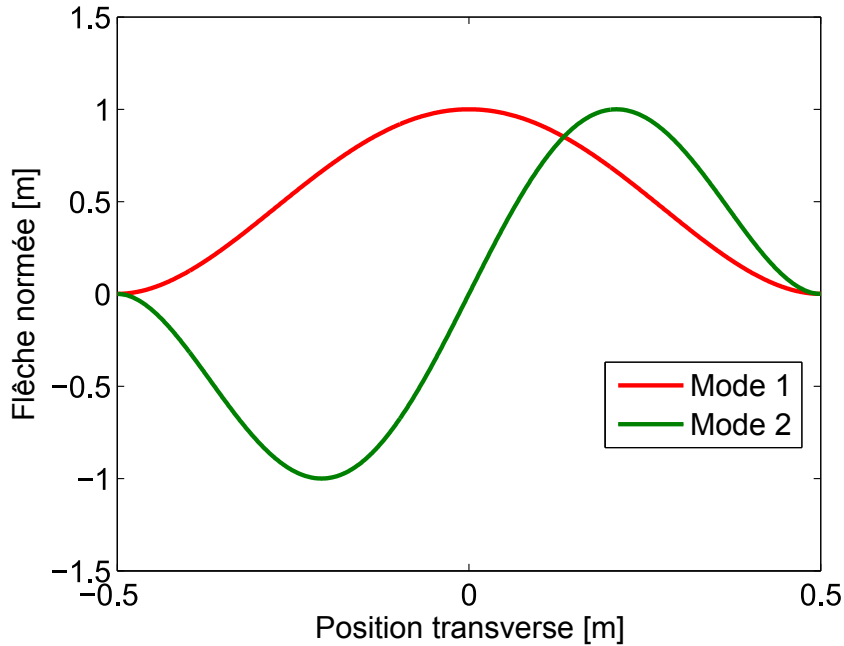


FIGURE 5.4 – Déformée transverse unitaire des deux premiers modes de flexion d'une poutre encastree-encastree.

développé au chapitre 3. Le nombre d'onde est déterminé pour chacune des sections puis l'amplitude de la déformation de la structure est calculée relativement par rapport aux autres sections. Les fréquences de réponse privilégiées des points extrêmes définissent la plage de réponse du guide d'onde tonotopique pour le deuxième mode de flexion. Les

courbes tonotopiques du premier et du deuxième mode sont tracées (voir figure 5.5) et la procédure suivante est appliquée pour déterminer les dimensions du banc d'essai :

- La fréquence minimale de réponse du guide d'onde est choisie arbitrairement.
- La largeur de la section, dont le premier mode de flexion répond préférentiellement à cette fréquence, est déterminée. Cette largeur est la largeur en bout de guide d'onde.
- La fréquence maximale de réponse est alors déterminée par rapport à la courbe tonotopique du deuxième mode de flexion.
- Enfin, la largeur correspondant à cette même fréquence mais pour le premier mode de flexion est déterminée. Cette largeur correspond à la largeur en entrée du guide d'onde.

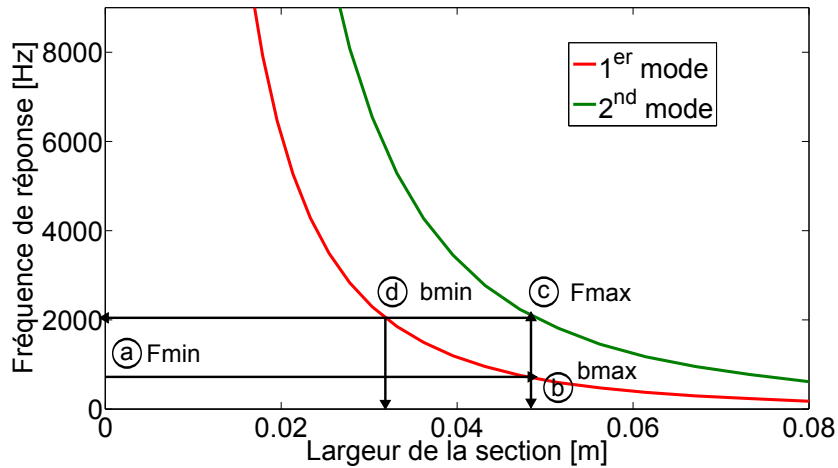


FIGURE 5.5 – Fréquences de réponse préférentielles des deux premiers modes de flexion transverse en fonction de la largeur de la section considérée. Procédure de détermination des largeur en extrémités de zone tonotopique : Ⓐ A partir de la fréquence minimale désirée  $F_{min}$ , la largeur  $b_{max}$  correspondante à cette fréquence pour le premier mode de flexion est déterminée à l'étape Ⓓ. Ensuite, l'étape Ⓒ trouve la fréquence de réponse préférentielle du deuxième mode en flexion de la même section. Cette fréquence est appelée  $F_{max}$ . Enfin, la largeur de section  $b_{min}$  répondant à cette fréquence  $F_{max}$  pour le premier mode de flexion est trouver à l'étape Ⓐ.

En partant d'un fréquence minimum de 0,7 kHz, la procédure décrite ci-dessus donne une largeur à l'entrée de la zone tonotopique de 32 mm et une largeur en sortie de 48 mm pour une plage de fréquence allant jusqu'à 2 kHz. Sachant que le premier mode de flexion est principalement sollicité, le risque est pris d'augmenter la plage de réponse en fréquence en choisissant des dimensions plus étroites à l'entrée et plus large à la sortie de la zone tonotopique. En se basant uniquement sur la courbe de réponse du premier mode (figure (5.5)), les dimensions sont déterminées pour la gamme 0,4 – 5 kHz. La largeur en entrée est donc de 22 mm pour une largeur en sortie de 60 mm.

La dernière contrainte de conception est le rapport de la hauteur des canaux sur la longueur de la zone tonotopique. Ce ratio est défini comme  $\frac{H}{L} = \epsilon$  dans le chapitre 3 et doit être très inférieur à 1 pour que l'hypothèse de guide d'onde soit vérifiée. Dans le cas de l'oreille humaine, il est de l'ordre de  $\frac{1}{35}$ . La longueur  $L$  ne modifie pas le résultat de chaque section mais permet uniquement de valider l'hypothèse de faible variation. Une fois que la largeur est fixée, il convient alors d'ajuster la longueur du guide d'onde, en veillant toutefois à ne pas dépasser la limite des moyens de fabrication (environ 1 mètre de longueur totale).

### 5.3.2 Paramètres de la zone tonotopique

Les paramètres déterminés en respectant les contraintes décrites dans la section (5.3.1) sont rassemblés dans la table ci-après (voir table 5.1).

Paramètres	Symbole	Valeur
Longueur de la ZT	$z_B - z_A$	375mm
Epaisseur	$h_0$	1mm
Largeur en entrée de ZT	$b_{min}$	22mm
Largeur en sortie de ZT	$b_{max}$	60mm
Module de Young	$E$	72000MPa
Masse volumique	$\rho_p$	2800kg/m <sup>3</sup>
Amortissement structural	$\eta_s$	0.005

TABLE 5.1 – Paramètres de la Zone Tonotopique (ZT)

## 5.4 Utilisation d'un trou noir acoustique

### 5.4.1 Principe du trou noir acoustique

Un trou noir acoustique est constitué d'une structure mince dont le profil en épaisseur suit une loi en puissance du type :

$$h(z) = \alpha(z_D - z)^n \quad (5.2)$$

où  $\alpha = h(z_0)/(z_D - z_C)$  est le ratio entre l'épaisseur initial à l'abscisse  $z_C$  sur la longueur totale du TNA. L'abscisse théorique de l'extrémité du TNA est  $z_D$ . Pour une onde se propageant sur une poutre en flexion, le profil d'épaisseur est réalisé sur une seule dimension. L'abscisse  $z$  correspond à la direction de propagation. Dans le cas d'une structure à deux dimensions, le profil peut être appliqué sur une cuvette [39]. Pour expliquer le principe de fonctionnement d'un TNA, l'exemple de la poutre en flexion dans le vide est repris.

L'équation d'une poutre en flexion de section constante, et de direction longitudinale  $z$ , peut être exprimée par :

$$D_f \frac{\partial^4 v(z, t)}{\partial z^4} + \rho_s A \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (5.3)$$

où  $A = bh$  est l'aire de la section rectangulaire de la poutre, avec  $b$  la largeur et  $h$  l'épaisseur.  $D_f = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  est la rigidité en flexion de la poutre, avec  $E$  le module de Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson. Pour une excitation harmonique à la fréquence  $\omega$ , la solution pour la déflexion  $v(z, t)$  est recherchée sous la forme d'une onde [45] (voir équation 3.2) :

$$v(z, t) = v_z e^{i(kz - \omega t)} \quad (5.4)$$

Une relation entre le nombre d'onde  $k$  et la fréquence  $\omega$  apparaît alors :

$$k = \left( \omega^2 \frac{\rho_s A}{D_f} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (5.5)$$

La vitesse de groupe se déduit alors de cette expression [22] :

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = 2 \left( \frac{Eh^2}{12\rho_s(1-\nu^2)} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\omega} \quad (5.6)$$

Lorsque la section de la poutre n'est pas constante, l'équation (5.3) n'est plus exacte et les dérivées de la section doivent être prises en compte. Cependant, si ces variations sont suffisamment faibles sur une longueur équivalente à une longueur d'onde, ces variations sont négligées. Mironov [94] a montré qu'un profil d'épaisseur suivant une loi décroissante en puissance vérifiait ces conditions et permettait de créer un phénomène physique intéressant. La substitution de l'épaisseur  $h$  par son expression donnée par (5.2) dans l'expression de la vitesse de groupe (5.6) donne :

$$c_g(z) = \frac{\partial \omega}{\partial k} = 2 \left( \frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\omega} \sqrt{\alpha} (z_t - z)^{\frac{n}{2}} \quad (5.7)$$

Cette vitesse de groupe tend vers zéro lorsque l'abscisse  $z$  se rapproche de l'extrémité de la poutre  $z_t$ . Physiquement, cela signifie que l'onde de flexion qui se propage le long de la poutre ralentit sa progression jusqu'à s'arrêter totalement. Théoriquement, l'onde n'atteint jamais l'extrémité et n'est pas réfléchi. En pratique, le profil est tronqué et l'onde n'atteint jamais la vitesse nulle. Cuenca [22] a montré qu'un coefficient de réflexion  $R$  représentant le ratio de l'amplitude de l'onde réfléchi sur l'amplitude de l'onde incidente en un point d'abscisse  $z_i$  peut être calculé sous la forme :

$$R = \exp^{-2\text{Im} \left( \int_{z_i}^{z_t} k(z) dz \right)} \quad (5.8)$$

Ce coefficient correspond au coefficient de réflexion défini au (3.57). En introduisant un amortissement structural sous la forme d'un module de Young complexe  $E_c = E(1 - i\eta)$  et en remplaçant  $h$  par son expression en fonction de  $z$  (5.2), le coefficient de réflexion devient :

$$R = \exp^{-A \frac{\eta}{1+\eta^2} \left( \int_{z_i}^{z_t} \frac{1}{\alpha(z_t - z)^n} dz \right)} \quad (5.9)$$

Puisque  $A > 0$ , lorsque  $n \geq 2$ , ce coefficient tend vers zéro. Si le profil est tronqué, la formule (5.9) donne une valeur strictement positive de  $R$ . Afin de minimiser ce ratio  $R$ , l'idée développée par Krylov [66] et Georgiev [39] est d'adosser à la poutre en flexion une couche de matériau dont le coefficient d'amortissement structural est très supérieur à celui du matériau de la poutre (voir figure 5.6). Ainsi, le but est d'augmenter la partie imaginaire du nombre d'onde et donc ainsi de réduire  $R$ .

Ici, le trou noir acoustique est appliqué dans un cas particulier. A la place d'une poutre, la variation d'épaisseur est imposée sur une plaque encastree sur ses deux bords latéraux. De plus, le trou noir acoustique est immergé entre deux couches de fluide. Le concept reste toujours de faire tendre le nombre d'onde vers l'infini et donc la longueur d'onde vers zéro. Le trou noir acoustique, utilisé sur des structures minces, donne de bons résultats pour des moyennes et hautes fréquences [39]. L'ajout d'un fluide lourd en interagissant avec la plaque vibrante introduit un terme inertiel à l'équation dynamique de la plaque et réduit sa fréquence de réponse. L'efficacité du trou noir tend donc à s'améliorer.

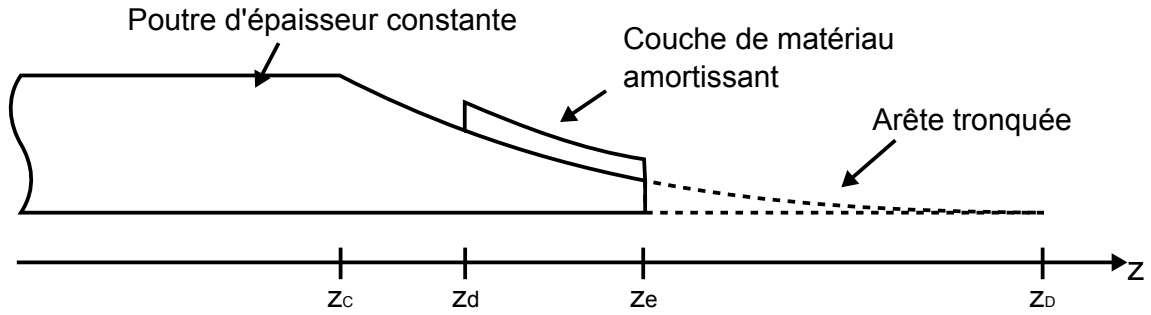


FIGURE 5.6 – Profil d'un trou noir acoustique tronqué et doté d'une couche de matériau amortissant.

#### 5.4.2 Estimation par la méthode WKB

Une plaque est encastrée sur ces deux bords constitue un guide d'onde de flexion dans une direction privilégiée  $z$ . Un profil d'épaisseur décroissant en  $z^2$  est imposé sur la plaque de largeur constante. La plaque est immergée entre deux canaux remplis de fluide (voir figure 5.7). Aucun modèle de la littérature ne permet de décrire un tel trou noir.

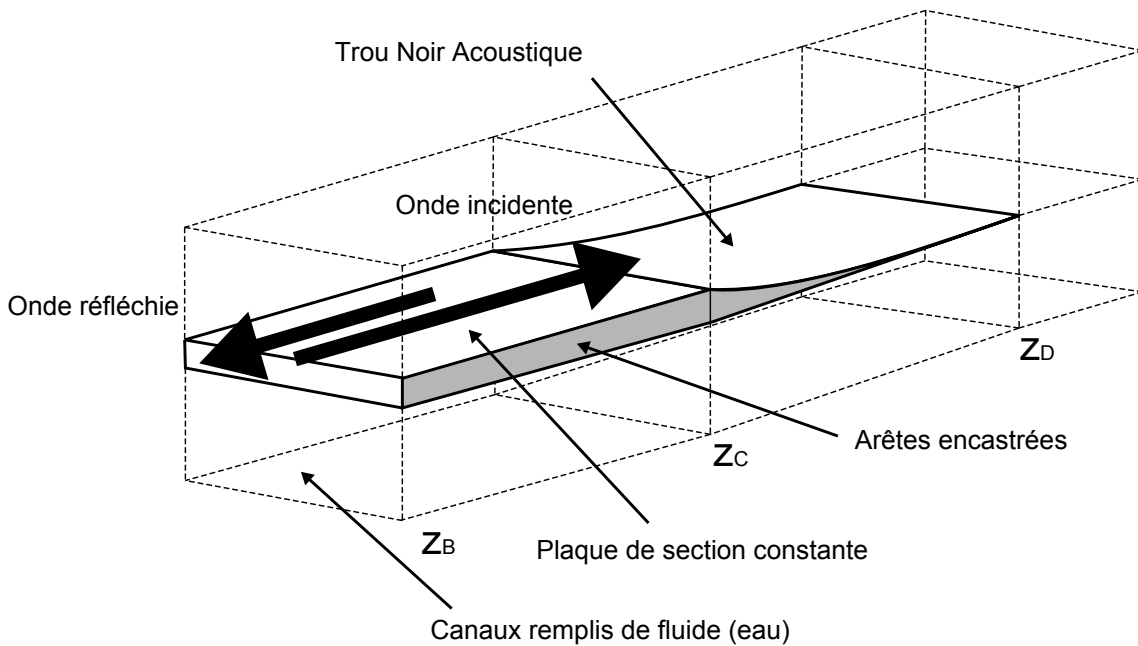


FIGURE 5.7 – Trou noir acoustique dans une plaque en flexion encastrée sur ses deux bords latéraux.

La méthode des matrices d'impédances décrites par Georgiev [39] serait adaptable à ce problème. Dans cette méthode, chaque section est décrite par des variables d'état et une matrice d'évolution. Une équation non linéaire de Riccati est exprimée et permet de trouver les valeurs de l'impédance de chacune des sections à partir des conditions aux limites. La solution est de modifier le vecteur d'état en ajoutant deux variables correspondant à la pression et à la vitesse du fluide. La matrice d'évolution serait également modifiée en fonction des équations choisies pour régir le comportement du fluide. Cette solution a plusieurs inconvénients :

- La taille des matrices pour chacune des sections est augmentée et la résolution de l'équation de Riccati plus longue. L'équation de Riccati introduit des dérivées en  $z$ . Il convient d'adapter le pas de résolution numérique en fonction de la variation des variables en fonction de  $z$ . Or, la variation du nombre d'onde est justement très grande en extrémité de trou noir acoustique. Par conséquent la longueur d'onde est très courte et la variation des paramètres rapide. Le nombre d'itérations est relativement important et des matrices plus grandes rendent la simulation inutilisable.
- En ajoutant uniquement deux degrés de liberté pour le fluide, la pression dans l'épaisseur des canaux n'est décrite que par un champ constant. Plusieurs degrés de libertés peuvent être ajoutés pour pallier cette approximation mais la taille des matrices est d'autant plus augmentée.
- Les nombres d'onde sont trouvés par la recherche des valeurs propres des matrices d'évolution. Dans le cas d'une poutre en flexion, ces valeurs propres sont déterminées analytiquement en fonction des paramètres de la section. Dans le cas, d'une matrice d'évolution modifiée par des degrés de libertés fluide, ces valeurs propres ne peuvent être déterminées de la même manière. Une recherche numérique de ces valeurs propres ralentit d'autant plus le calcul.

La mise en place de cette méthode paraît difficile et trop coûteuse en temps de calcul. Or, il se trouve que le trou noir ainsi créé est un guide d'onde dont la section varie lentement dans la longueur d'une longueur d'onde. Cette condition correspond également à la condition nécessaire à l'application de la méthode WKB (voir chapitre 3). La méthode WKB peut donc être appliquée sur ce trou noir immergé. Cette méthode présente plusieurs avantages dans ce cas précis :

- La méthode est la même que celle utilisée pour le calcul de la zone tonotopique. Le couplage entre les deux zones est quasiment direct.
- Il n'y a pas de relation directe dans le calcul d'une section à l'autre. Le pas spatial est déterminé arbitrairement.
- Le champ de pression fluide est représenté par une somme de fonctions sinus dont le nombre peut être ajusté afin d'obtenir la précision souhaitée. Cinquante modes suffisent largement à décrire le champ avec la précision souhaitée sur la valeur du nombre d'onde.
- Le temps de calcul est nettement plus réduit que par la méthode des matrices d'impédances.

Le déroulement de la méthode WKB est le même que dans le chapitre 3. La seule différence est que la largeur de section est désormais constante et seule l'épaisseur varie. Les variations de la hauteur de l'épaisseur de fluide, conséquence de la variation de l'épaisseur de la plaque, sont négligées. Afin de prendre en compte la couche de matériau amortissant (CMA), une masse volumique équivalente est calculée ainsi qu'un module de Young complexe [39]. Pour réaliser ce calcul, les paramètres requis de la CMA sont la masse volumique  $\rho_a$ , l'épaisseur (constante)  $h_a$ , le module de Young  $E_a$ , le coefficient d'amortissement structural  $\eta_a$ . La masse volumique du nouveau matériau composée de la plaque et de la CMA est calculée par :

$$\rho_{eq} = \frac{\rho_a h_a + \rho h}{h + h_a} \quad (5.10)$$



De même, un module de Young équivalent est calculé par :

$$E_{eq} = E \left( (1 + i\eta) + \frac{E_a}{E} \left( \frac{h_a}{h} \right)^3 (1 + i\eta_a) + \frac{3 \left( 1 + \frac{h_a}{h} \right)^2 \frac{E_a h_a}{E h} (1 - \eta\eta_a + i(\eta + \eta_a))}{1 + \frac{E_a h_a}{E h} (1 + i\eta_a)} \right) \quad (5.11)$$

La première étape consiste à calculer le nombre d'onde complexe par l'équation eikonale. Le lieu des racines obtenu (voir figure 5.8) permet de comparer les comportements de la zone tonotopique et du trou noir acoustique. La partie imaginaire négative permet d'estimer

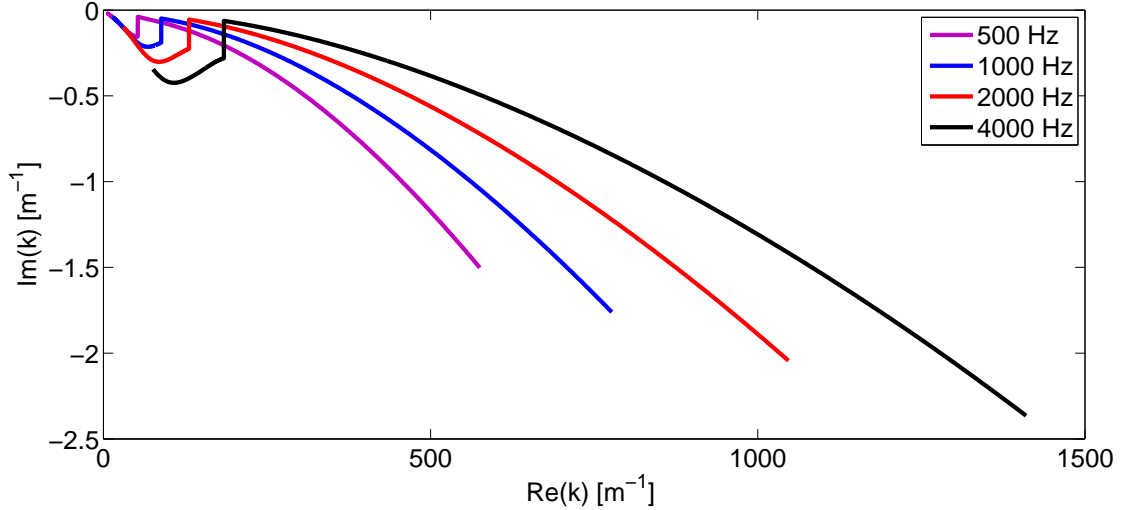


FIGURE 5.8 – Lieux des racines tracés pour le cas de la plaque immergée dans l'eau pour trois fréquences à l'aide de la méthode WKB.

l'amortissement d'un guide d'onde. Dans le cas de la plaque de largeur variable, la partie imaginaire négative augmente dans un premier temps jusqu'au lieu caractéristique. Dans le même temps, la partie réelle ne cesse de croître. Ensuite, la partie imaginaire décroît tandis que la partie réelle continue d'augmenter. Dans le cas du trou noir, la partie imaginaire ne cesse de croître ce qui atténue d'autant plus la vibration. Cuenca [22] utilise le rapport des modules de la partie imaginaire sur la partie réelle du nombre d'onde  $k$  afin d'optimiser le facteur de perte du trou noir acoustique :

$$\tau = \frac{|Im(k)|}{|Re(k)|} \quad (5.12)$$

Ce ratio semble être plus important pour la zone tonotopique que pour la zone du trou noir acoustique (voir figure 5.9). Cependant compte-tenu de la viscosité et de l'inertie du fluide, ce résultat est plutôt surprenant puisque l'efficacité du trou noir devrait globalement être améliorée. L'étude du modèle du trou noir acoustique immergé n'est pas poussée suffisamment loin pour pouvoir conclure sur son efficacité. Les solutions admissibles étant déterminées, l'amplitude de l'onde incidente et de l'onde réfléchie sont calculées par l'équation 3.53 et les conditions aux limites 3.55 et 3.56. Un tracé de l'amplitude de chaque onde sur le même graphique, sans les additionner, permet de se rendre compte de l'amortissement apporté par le trou noir acoustique (voir figure 5.10). L'onde qui se propage à travers le trou noir est atténuée sur le trajet aller mais également sur le trajet retour.

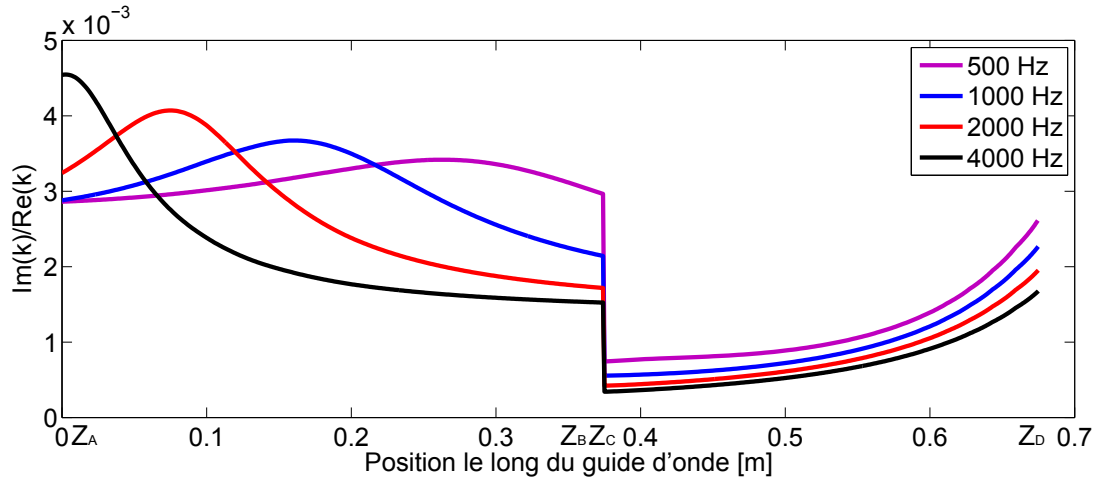


FIGURE 5.9 – Ratio  $\tau$  des modules de la partie imaginaire du nombre d'onde et de la partie réelle obtenus par la méthode WKB. La zone de section constante n'est pas représentée sur cette figure (les abscisses  $z_B$  et  $z_C$  sont confondues).

### 5.4.3 Dimensionnement

La procédure pour dimensionner le trou noir est reprise des études précédentes [39]. Une fois le trou noir dimensionné, la méthode WKB est utilisée pour caractériser le trou noir. La procédure étant valable pour optimiser un trou noir sur une poutre en flexion dans le vide, il est probable que le trou noir appliqué sur la plaque immergée ne soit pas optimal. Cependant, dans le cas d'un trou noir classique, l'objectif est de réaliser un contrôle passif de vibration de structures minces. Les structures minces sont notamment beaucoup utilisées dans l'aéronautique et le spatial. Dans ces deux domaines, la masse est l'une des principales contraintes de conception. Le trou noir acoustique présente alors un intérêt très fort. Contrairement à la plupart des systèmes de contrôle passif des vibrations, la masse ajoutée est faible et dans certains cas, un gain de masse peut même être réalisé. L'application présentée dans ce chapitre ne possède aucune contrainte liée à la masse. La couche de matériau amortissant est donc relativement épaisse ce qui permet d'augmenter l'atténuation. Elle est appliquée sur toute la longueur du trou noir. Le matériau choisi a un coefficient d'amortissement structural de 0.01, un module de Young de 950 MPa, et une masse volumique de 1000 kg/m<sup>3</sup>.

La réalisation du TNA répond à plusieurs contraintes. La première concerne le matériau dans lequel est réalisé le trou noir acoustique. L'usinage d'un TNA exige certaines caractéristiques de la part du matériau. Il doit être ni trop souple, ni trop raide, afin de permettre une bonne qualité d'usinage. La rigidité du matériau augmente les fréquences de réponse à géométrie identique et masse volumique équivalente. Pour obtenir une réponse dans la gamme désirée, la largeur du guide d'onde devra alors être augmentée ou l'épaisseur réduite. L'acier est trop rigide pour réaliser un tel usinage. L'un des matériaux le plus adapté à la réalisation d'un TNA est l'aluminium. C'est donc le matériau qui est choisi pour réaliser le TNA et la partie vibrante du guide d'onde.

La deuxième contrainte concerne l'épaisseur initiale du TNA. Pour des raisons technologiques, l'épaisseur de la plaque dans laquelle est usiné le trou noir acoustique doit être au minimum de 1mm. En-deçà de cette valeur, le résultat de l'usinage n'est pas fiable et la géométrie n'est pas fidèle au modèle. L'épaisseur finale du trou noir acoustique doit être la plus faible possible pour avoir une bonne efficacité (voir section 5.4). Les efforts d'usinage

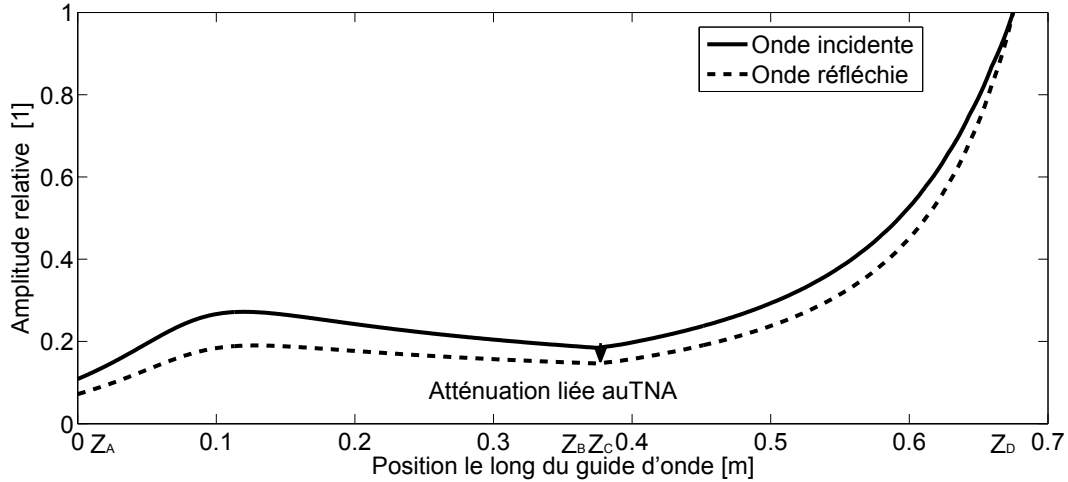


FIGURE 5.10 – Fonctions enveloppes de l’onde incidente et de l’onde réfléchie à la fréquence  $f = 2000\text{Hz}$  pour le cas de la plaque immergée dans l’eau. La zone de section constante n’est pas représentée sur cette figure (les abscisses  $z_B$  et  $z_C$  sont confondues).

importants doivent être supportées par la matière restante qui devient de plus en plus petite puisque l’objectif est d’atteindre une épaisseur nulle. Les risques de déchirures sont relativement importants et il est difficile de parvenir à usiner une pièce sans défaut. Cette contrainte d’épaisseur minimale pour le trou noir fixe également l’épaisseur de la zone tonotopique.

La largeur du trou noir est constante et déterminée par la largeur à l’extrémité de la zone tonotopique. Le trou noir acoustique est aussi long qu’autorisé par les moyens de fabrication. Un compromis est réalisé entre la longueur de la zone tonotopique et la longueur du trou noir acoustique. De plus, afin de réaliser de futures mesures plus complètes pour caractériser le trou noir acoustique, une zone de section constante est conçue entre la zone tonotopique et le TNA. Cette zone n’est pas représentée dans le modèle car elle est supposée ne pas influencer sur la propagation des ondes. De la même manière, l’hypothèse de variation continue et lente de la section n’est pas exactement vérifiée en deux points. A la fin de la zone tonotopique, la largeur du guide d’onde cesse d’augmenter subitement. Entre la zone de largeur constante et le TNA, l’épaisseur de la plaque débute sa variation de manière brutale et la CMA provoque également une variation brusque des paramètres de raideur et d’inertie. Ces variations brusques génèrent des réflexions partielles des ondes. Cependant, il est supposé que ces cassures dans les profils de paramètres sont suffisamment faibles pour être négligées.

Les paramètres et les dimensions du trou noir réalisé sont rassemblés dans la table 5.2. Le calcul par la méthode WKB est réalisé avec ces paramètres. Le calcul du coefficient de réflexion, défini par l’expression 5.8, est équivalent au calcul effectué dans la méthode WKB à partir des conditions limites pour trouver l’amplitude de l’onde incidente et celle de l’onde réfléchie (voir équation 3.57). Ce coefficient est tracé sur la plage de fréquence de réponse de la zone tonotopique dans l’air et dans l’eau (voir figure 5.11). Le coefficient de réflexion est plus faible dans l’eau que dans l’air pour les raisons expliquées précédemment.

Cependant, les paramètres du trou noir acoustique influent beaucoup sur ces résultats et une investigation plus poussée est requise pour optimiser l’efficacité du trou noir à l’aide de la méthode WKB. Le but recherché ici est d’utiliser le trou noir acoustique afin de réduire l’amplitude des ondes réfléchies. Les résultats théoriques présentés montrent un coefficient

Paramètres	Symbole	Valeur
Longueur du TNA	$L_{TNA}$	375mm
Épaisseur initiale	$h(z_C)$	1mm
Module de Young du matériau amortissant	$E_{ma}$	500MPa
Masse volumique du matériau amortissant	$\rho_{ma}$	950kg/m <sup>3</sup>
Amortissement structural du matériau amortissant	$\eta_{ma}$	0.05
Épaisseur de la couche de matériau amortissant	$h_{ma}$	0.02mm
Abscisse initiale du TNA	$z_C$	375mm
Abscisse initiale de la CMA	$z_d$	375mm
Abscisse optimale d'extrémité du TNA	$z_D$	725mm
Abscisse de troncature du TNA	$z_e$	625mm
Épaisseur résiduelle (mesurée)	$h(z_e)$	35 $\mu$ m

TABLE 5.2 – Paramètres du trou noir acoustique

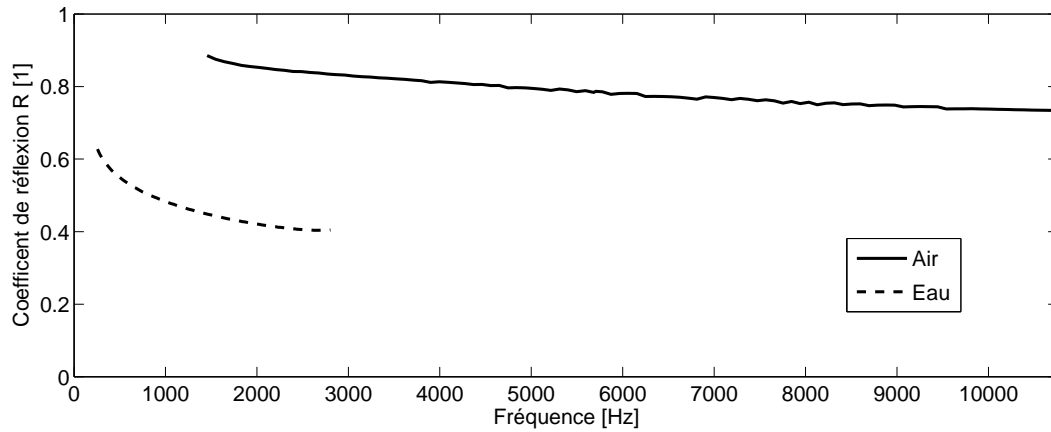


FIGURE 5.11 – Coefficient de réflexion (rapport de l'amplitude de l'onde réfléchie sur l'amplitude de l'onde incidente) en fonction de la fréquence dans l'air et dans l'eau.

de réflexion relativement élevé qui est à comparer avec les résultats expérimentaux (voir section 5.8).

## 5.5 Réalisation du banc d'essai

Le trou noir acoustique et la zone tonotopique sont usinés dans la même plaque. Cette dernière est ensuite pincée entre deux cadres en acier. Ces cadres sont usinés de telle sorte qu'ils servent également de parois latérales aux canaux remplis de fluide. Ces cadres ont une épaisseur de 20 mm et sont percés de 67 trous permettant d'assembler toutes les pièces ensemble et de réaliser une pression suffisamment bien répartie pour obtenir un encastrement de qualité. La paroi inférieure est constituée par le fond non-débouchant de l'un des cadres. La paroi supérieure est réalisée par une plaque transparente de Plexiglas® qui permet de réaliser les mesures vibratoires à travers. L'assemblage final est représenté sur la figure 5.12. Toutes les opérations nécessaires à ces usinages sont réalisées à l'aide de

procédés standards.

L'usinage du trou noir acoustique (voir figure 5.13) requiert un savoir-faire et une expé-

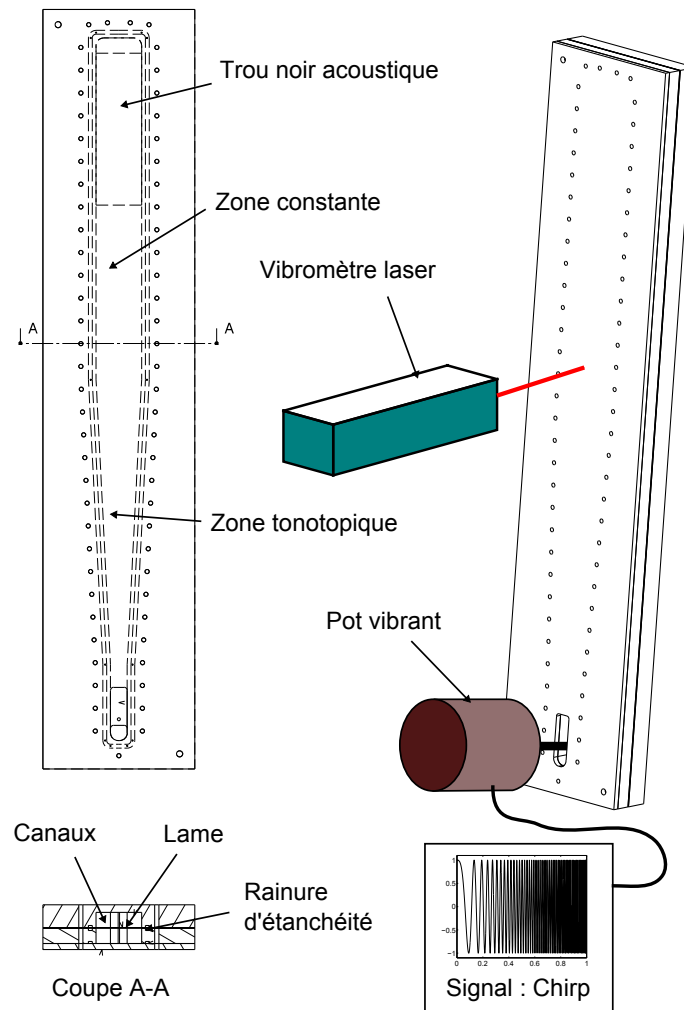


FIGURE 5.12 – Schéma de l'assemblage du banc d'essai.

rience particulière. La précision de l'usinage est très importante car elle caractérise le trou noir et le rend efficace ou non. Cette opération est réalisée par un usinage sur une machine à commande numérique. Cette technique possède plusieurs contraintes, précédemment décrites. L'application à un modèle de cochlée artificielle à taille réelle nécessiterait une étude de faisabilité préalable car les épaisseurs visées sont très faibles. Le banc d'essai est représenté sur la figure 5.14. La photographie montre un banc d'essai disposé horizontalement afin de pouvoir effectuer la comparaison avec le schéma de la figure 5.1. Lors de l'essai, le banc est suspendu verticalement afin de maintenir le fluide dans les canaux par gravité.

### 5.5.1 Excitation

L'excitation de la structure est réalisée au moyen d'un pot vibrant fixé sur la lame par l'intermédiaire d'une liaison boulonnée. L'axe du pot vibrant passe par la ligne médiane de la plaque afin d'exciter principalement le premier mode de flexion. Le pot vibrant est suspendu sur un portique. Pour éviter toute vibration parasite de la liaison boulonnée, une gomme aux propriétés amortissantes est appliquée autour de la liaison boulonnée



FIGURE 5.13 – Trou noir acoustique intégré sur le banc d'essai.

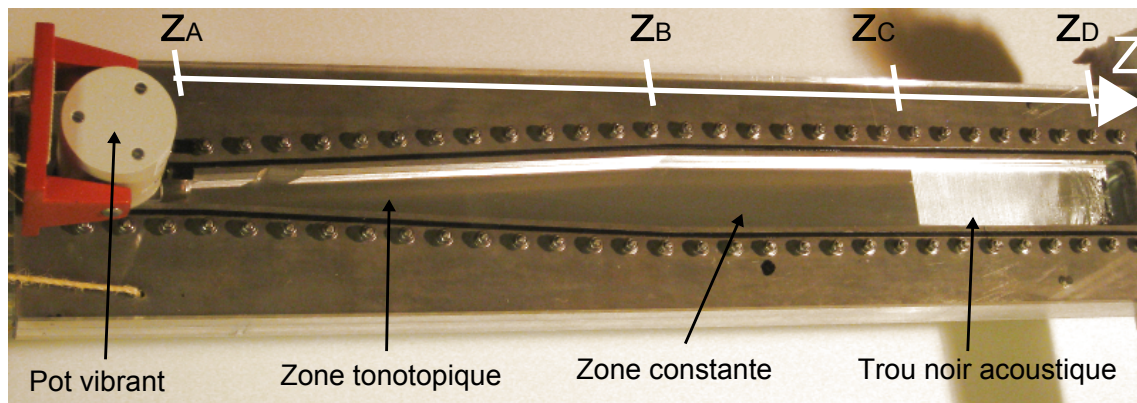


FIGURE 5.14 – Photographie du guide d'onde, monté avec le pot vibrant et la tête d'impédance.

(voir figure 5.15a). Le pot vibrant permet d'appliquer une force sur la plaque. Dans le modèle, un déplacement est imposé. Il est supposé que la force  $F$  appliquée en amont de l'abscisse  $z = z_A$  provoque un déplacement  $v_0$  à l'abscisse  $z = z_A$  (voir figure 5.16a). La fonction de transfert entre la force et le déplacement imposé est inconnue et n'est pas recherchée. A l'autre extrémité, la condition de moment de flexion nul est bien vérifiée car l'arête en  $z = z_D$  est libre. La recirculation du fluide provoque un champ de pression plus complexe qui n'est pas étudié ici. Le pot vibrant est commandé en boucle ouverte. Une tension proportionnelle au signal d'entrée est appliquée à ses bornes. Le signal d'entrée est un signal du type « burst sine chirp ». Cela correspond à un sinus glissant dont la fréquence varie rapidement sur une plage de fréquence choisie. Le terme « burst » indique que le signal n'est pas continu mais qu'une pause est observée entre chaque balayage. Une excitation de ce type permet d'obtenir beaucoup d'informations sur la réponse en fréquence du système en un temps relativement réduit. Le guide d'ondes étudié ne présente pas de résonance à des fréquences particulières. Le sinus glissant paraît donc adapté. La bande de fréquence est choisie arbitrairement. Pour le cas dans l'eau, la bande est de 0 à 4kHz. Par

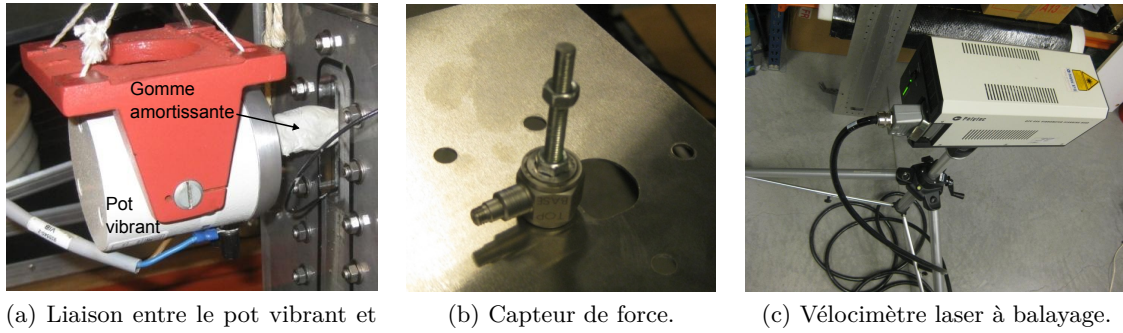


FIGURE 5.15 – Actionneur et capteurs utilisés : pot vibrant, tête d'impédance et vélocimètre laser à balayage.

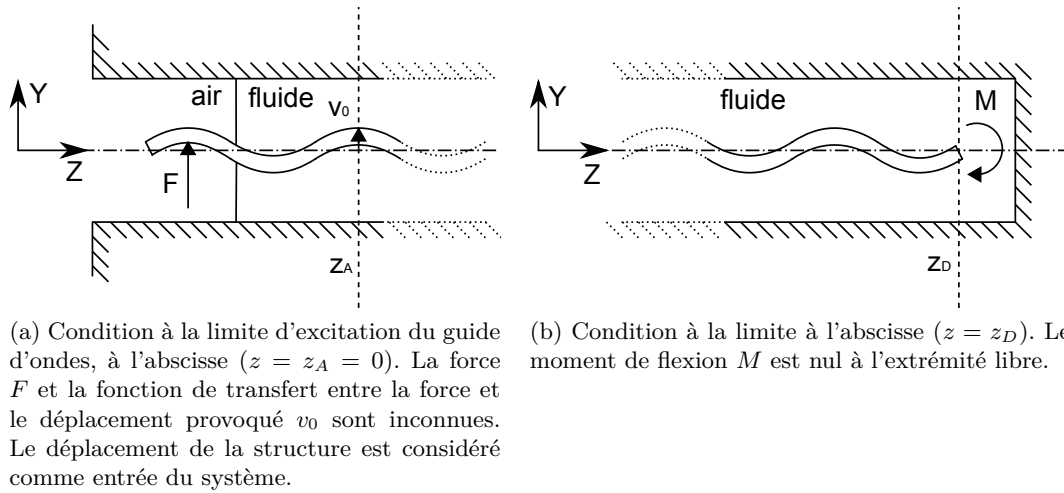


FIGURE 5.16 – Conditions aux limites du guide d'onde.

le théorème de Shannon, la fréquence d'échantillonnage est déduite de la borne supérieure de la plage fréquentielle étudiée. Le nombre de bande de fréquence  $n_f$  détermine la résolution fréquentielle de la mesure. Le maximum permis par le logiciel est de 6400 fréquences de mesures. Dans le cas de l'eau, la résolution fréquentielle est de  $\frac{4000}{6400} = 0,625 Hz$ . La durée nécessaire pour effectuer une mesure est calculée à partir de la résolution fréquentielle  $\frac{1}{0,625} = 1,6s$ .

### 5.5.2 Acquisition des données

L'acquisition des données est réalisée par l'intermédiaire de deux capteurs. Le premier est un capteur de force positionné entre le moyen d'excitation et la base du guide d'onde (voir figure 5.15b). Il permet de rapporter toutes les mesures à une même référence. Il permet également de vérifier la cohérence des mesures. Le second capteur est un vibromètre laser à balayage (voir figure 5.15c) qui permet de mesurer la réponse de la structure à l'excitation. Le faisceau laser est positionné de façon à atteindre la lame vibrante le plus perpendiculairement possible. Le faisceau laser permet de mesurer la vitesse de la



structure en un point, dans la direction du faisceau. Pour cela, le trajet du faisceau doit être perturbé le moins possible. Dans le cas où la lame vibrante est immergée entre deux canaux remplis d'eau, une attention particulière est apportée pour que le fluide soit propre de toute impureté ou bulle. Le vélocimètre est alors relié au système d'acquisition en lui-même. Plusieurs traitements des données sont effectués par le logiciel d'acquisition des données :

- Une fenêtre de type rectangle est appliquée pour l'entrée (force référence par le capteur de force) et la sortie (vitesse par le vibromètre laser).
- Afin de s'affranchir des mouvements du bâti, un filtre passe-haut est appliqué à partir de  $50Hz$ . Le bâti est suspendu ou fixé sur un support au sol. Dans les deux cas, le bâti subit des oscillations à basse fréquence qui peuvent être gênante.
- Afin de réduire le bruit, les mesures sont moyennées sur 6 acquisitions pour chaque point.
- Le laser mesure la vitesse de la structure. Pour obtenir le déplacement, une intégration est effectuée sur le signal.

Ces données sont ensuite extraites pour être traitées. Ici, les données exportées correspondent à la position des points relevés. Pour chaque point, une courbe de Fonction de Réponse en Fréquence (FRF) dont les valeurs sont complexes est également extraite. La composante complexe est ici importante car elle permet de représenter le déphasage entre deux points et donc la propagation des ondes. Ces données sont ensuite traitées sous Matlab© pour être analysées et comparées au modèle.

## 5.6 Résultats à fréquence donnée

Pour chaque point  $P_i$  de coordonnées  $(x_i, z_i)$  dans le plan, une FRF complexe est donnée sur le vecteur des fréquences  $f_m$  défini par la fréquence d'échantillonnage et le processus de mesure (voir section 5.5.2). Cette fonction est nommée  $H(P(x_i, z_i), f_m)$ . Dans le développement qui suit, elle sera principalement utilisée en se fixant sur une fréquence  $f_m$  particulière et en faisant varier le point  $P_i$ . La fréquence choisie est  $f_m = 5706Hz$ . Cette fréquence est choisie arbitrairement mais les résultats pour d'autres fréquences sont fournis en annexe et sont proches de ceux décrits ici. Les résultats présentés ici sont ceux obtenus dans le cas où les canaux sont remplis d'air.

La partie réelle de  $H(P(x_i, z_i), f_m)$  donne la déformée opérationnelle de la structure (*Operational Deflection Shape*). Elle correspond à une image instantanée de la déformation de la structure. Cette déformée est très utile pour avoir une première idée de la réponse de la structure et des modes sollicités. L'une des première mesure a été effectué sur un maillage de points répartis sur toute la surface de la lame et également sur le bâti (voir figure 5.17). La déformée montre que la vibration du bâti est négligeable devant la vibration de la lame. Il apparaît que le premier mode de flexion transverse de la lame est sollicité. Ce résultat est logique pour la gamme de fréquence d'excitation choisie. Le fait que le point d'excitation se situe sur le segment médian de la lame favorise également ce résultat. Puisque le premier mode est principalement sollicité, les mesures sont axées sur les points appartenant au segment médian de la lame ce qui permet d'augmenter la résolution spatiale sans augmenter le temps d'acquisition.

Le module de la fonction  $H(P(x_i, z_i), f_m)$  permet d'obtenir une fonction enveloppe de la déformée (voir figure 5.18). Le pics de réponse maximum sont repérés facilement sur cette courbe. Cette courbe est comparée aux résultats obtenus par la méthode WKB (voir figure 3.8). Le coefficient de réflexion déterminé par le modèle est de l'ordre de 0,7. Les résultats expérimentaux et le modèle sont bien corrélés. Les pics d'amplitude de réponse maximale



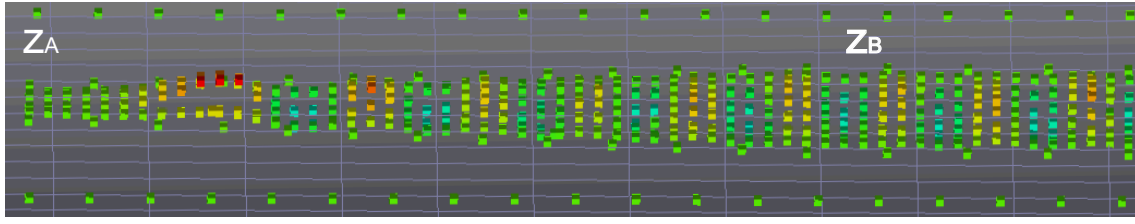


FIGURE 5.17 – Déformée opérationnelle mesurée sur toute la surface de la plaque pour une fréquence de  $f_m = 5706\text{Hz}$ . Les lignes de points extérieurs sont mesurées sur le bâti. La couleur verte représente un déplacement nul, la couleur rouge un déplacement positif et la couleur bleue un déplacement négatif.

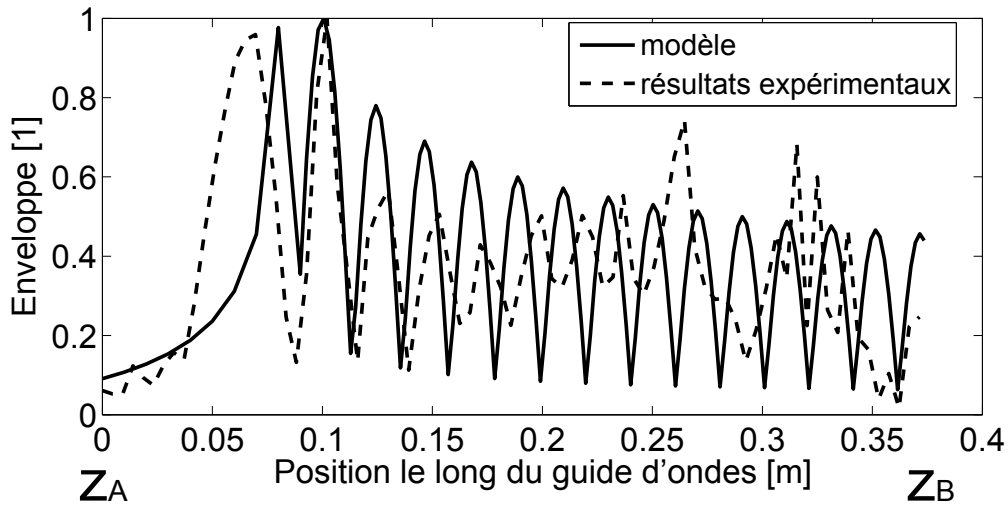


FIGURE 5.18 – Fonction enveloppe de la plaque dans l'air, mesurée expérimentalement pour une moyenne fréquence,  $f_m = 5706\text{Hz}$ .

sont situés dans les deux cas dans la même zone spatiale. La décroissance de l'amplitude des pics suit également la même tendance après le pic principal. Ce tracé montre que la déformée ne correspond pas à une onde stationnaire puisque la courbe enveloppe ne se rapproche la valeur nulle à aucun endroit. Tous les points sont en mouvement et il n'y a pas de noeuds modaux sur la structure. L'effet du trou noir acoustique est observable sur cette courbe. Des points de comparaisons supplémentaires sont utilisés dans la section 5.8 pour étudier l'effet du trou noir acoustique. Cependant, il est possible d'observer que la réflexion des ondes n'est pas totalement annulée à l'extrémité de la zone tonotopique puisque des pics secondaires subsistent après le pic principal.

La variable d'angle  $\angle(H(P(0, z_i), f_m))$  est extraite des données pour donner la phase de la vibration de la structure. Cette phase correspond au déphasage par rapport au point de référence qui est choisi comme le point d'abscisse  $z = z_A = 0$ . Cette courbe est comparée au résultat du modèle utilisant la méthode WKB (voir figure 5.19). Plusieurs résultats importants peuvent être observés sur cette courbe :

- Le fait que la phase varie en fonction de l'abscisse du point considéré montre que la vibration correspond à la propagation d'une onde et non à une réponse stationnaire de la structure. De plus la variation est identifiable et peu bruitée.

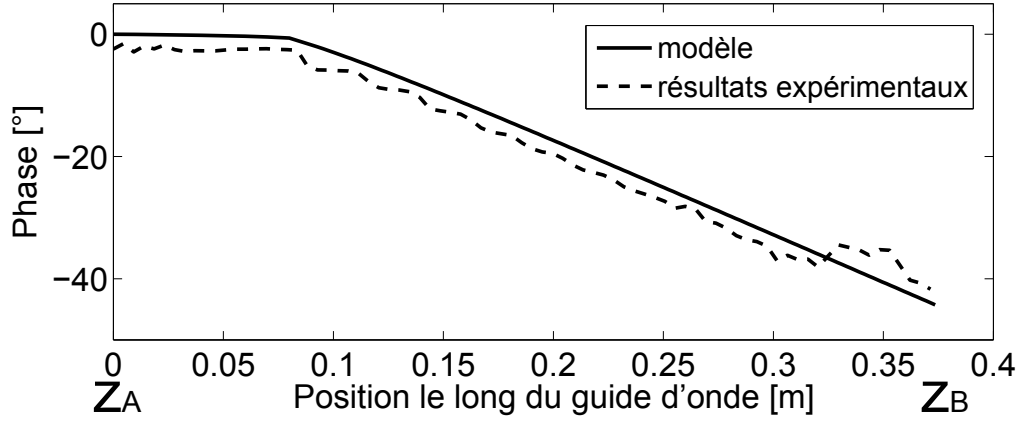


FIGURE 5.19 – Phase de la réponse de la plaque dans l'air, mesurée expérimentalement pour une moyenne fréquence,  $f_m = 5706\text{Hz}$ .

- Qualitativement, les courbes issues du modèle et des résultats expérimentaux sont très proches. La phase est proche de zéro avant l'abscisse correspondant au pic maximum, ce qui correspond à la zone des grandes longueurs d'onde où tous les points vibrent en phase. Ensuite, une cassure dans la courbe intervient et le déphasage augmente avec une pente régulière à partir de ce point. La position de cette transition est clairement identifiable et identique sur les deux courbes.
- La valeur de la pente une fois la cassure passée est la même pour le modèle et les résultats expérimentaux. Cette pente correspond à la valeur de la longueur d'onde spatiale des lobes après la zone de vibration maximale.

Dans le modèle, le premier résultat obtenu par l'utilisation de l'équation eikonale est le nombre d'onde. Ce nombre d'onde est la caractéristique importante d'un guide d'onde car il représente l'équilibre dans chacune des sections. Dans le cas des résultats expérimentaux le nombre d'onde peut être extrait des données obtenues. La vibration mesurée peut être exprimée sous la forme :

$$H(P(0, z_i), f_m) = H_{amp}(z_i)e^{\Phi(z_i)} \quad (5.13)$$

où  $H_{amp}(z_i)$  et  $\Phi(z_i) = \angle(H(P(0, z_i), f_m))$  sont respectivement le module et la phase calculée précédemment. En reprenant l'hypothèse de la méthode WKB, le terme de phase spatiale peut également s'exprimer sous la forme :

$$\Phi(z_i) = \int_0^{z_i} k(s)ds \quad (5.14)$$

où  $k(s)$  est la valeur dimensionnée du nombre d'onde. Le nombre d'onde peut alors être déduit en prenant la dérivée de la phase par rapport à  $z$ . L'estimation du nombre d'onde par cette méthode est tracée et comparée avec le modèle (voir figure 5.20). Qualitativement, les deux courbes sont comparables. La première partie de chacune des courbes montre un nombre d'onde relativement faible qui correspond à une longueur d'onde importante et un mouvement quasiment en phase. Le nombre d'onde subit une forte variation qui correspond à la position de la réponse maximale. Pour le modèle, le nombre d'onde continue de croître mais tend vers une asymptote horizontale. Pour les résultats expérimentaux le nombre d'onde suit la même tendance. Il faut cependant noter que la courbe du nombre d'onde oscille légèrement autour de la courbe du modèle. Le bruit de mesure présent sur

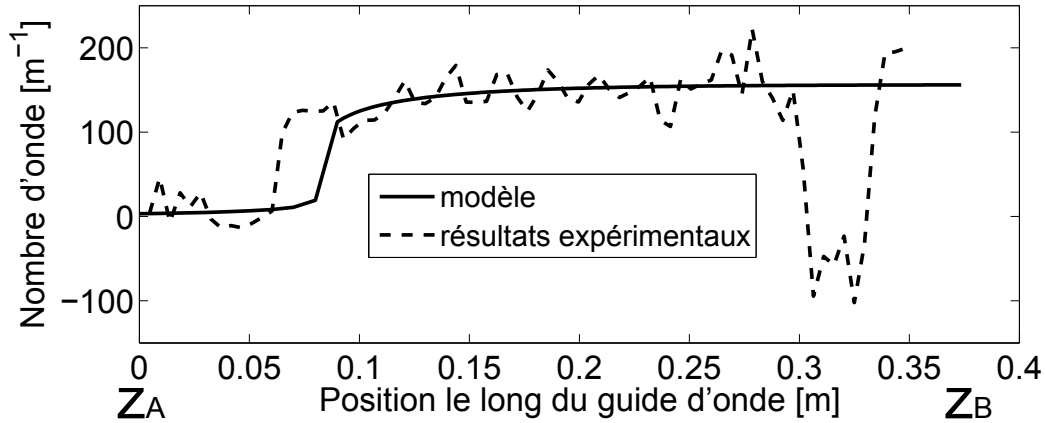


FIGURE 5.20 – Nombre d'onde de la plaque dans l'air, mesurée expérimentalement pour une moyenne fréquence,  $f_m = 5706\text{Hz}$ .

la courbe de la phase est amplifiée par la dérivation et certaines valeurs du nombre d'onde ne correspondent pas au modèle. Les valeurs négatives situées entre  $z = 0.3\text{m}$  et  $z = 0.35\text{m}$  correspondent à une onde se propageant dans le sens opposé vers les  $z$  négatifs. Ce phénomène peut être dû à une réflexion mais il est surprenant dans ce cas de ne pas retrouver ces mêmes ondes se propageant sur toute la longueur du guide d'onde. L'autre hypothèse est que le changement relativement brusque de la section à la fin de la zone tonotopique génère des ondes évanescentes réfléchies qui auraient un impact dans la zone en question sans pour autant se propager très en amont dans la zone tonotopique. En effet, par définition, les ondes évanescentes possèdent un facteur d'amortissement plus grand que le nombre d'onde lui-même.

Les différents résultats présentés dans cette section montrent que le modèle utilisant la méthode WKB parvient bien à décrire la propagation d'ondes dans la zone tonotopique. Les résultats pour l'amplitude, la phase et le nombre d'onde valident l'utilisation de ce modèle. Les résultats expérimentaux présentent une bonne qualité de lecture et vont pouvoir être utilisés pour réaliser l'objectif de cette étude expérimentale qui est de montrer la dépendance en fréquence de la position des pics de vibration.

### 5.6.1 Courbes tonotopiques

Les courbes tonotopiques sont obtenues du modèle en relevant la position du point de réponse maximum en fonction de la fréquence pour le cas de réflexion nulle (sans onde réfléchie). Ces courbes sont tracées pour le cas où les canaux sont remplis avec de l'air et le cas où les canaux sont remplis avec de l'eau (voir figure 5.21). Pour comparer avec les résultats expérimentaux, pour une fréquence donnée, le point maximal de l'enveloppe (voir figure 5.18) est localisé et sa position est reportée sur la figure 5.21. Plusieurs points expérimentaux sont relevés de la même façon et tracés sur ces courbes. Les points sont proches de la courbe du modèle. Ce type de graphique représente l'intérêt du guide d'onde qui est de reconnaître la fréquence à partir de la position du maximum de réponse. Afin d'utiliser ce dispositif en capteur acoustique avec une bonne précision, les points doivent constituer une unique ligne. Il est difficile d'estimer la réponse globale du guide d'onde puisque un seul point expérimental est relevé et la réponse des autres points est masquée par ce point maximum.

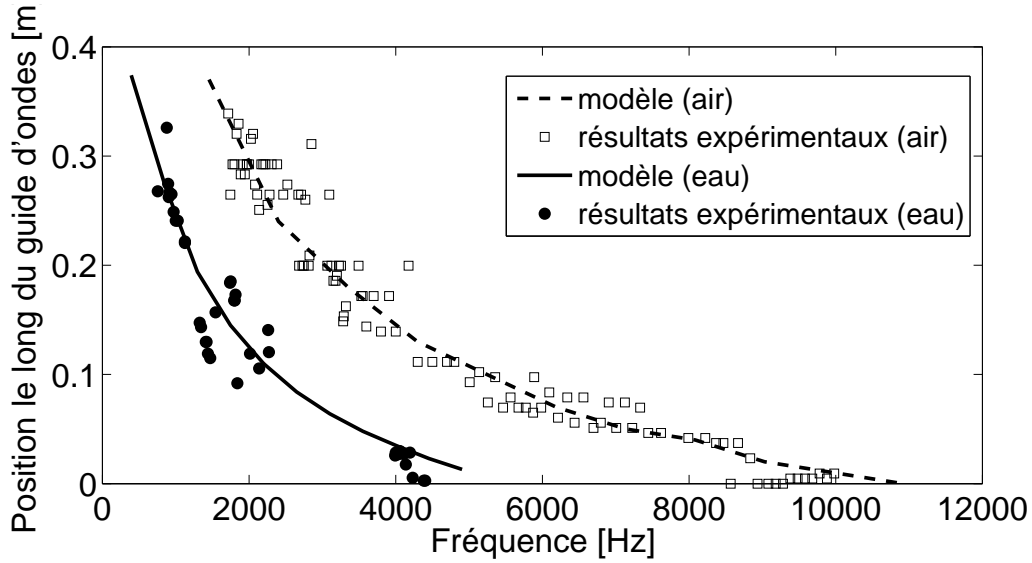


FIGURE 5.21 – Courbes tonotopiques pour le cas des canaux remplis d'air et d'eau. Comparaison du modèle et des données expérimentales.

## 5.7 Cartes tonotopiques

Dans cette section les résultats expérimentaux sont utilisés pour reconstruire des cartes de répartitions spatio-fréquentielles de la réponse. Les courbes d'enveloppe présentées précédemment sont tracées sur un seul et même graphique. L'objectif est d'avoir une idée globale de la tonotopie d'un guide d'onde.

### 5.7.1 Principe

Pour chacune des fréquences mesurées, la fonction enveloppe (voir figure 5.18) est normalisée par rapport à son propre maximum. Le résultat est tracé sur une carte en couleur (en utilisant la fonction `colormap` de MATLAB®). L'abscisse est la fréquence et l'ordonnée est la position le long du guide d'onde. La couleur permet de donner l'amplitude de la fonction enveloppe. La couleur bleue correspond au zone de faible vibration alors que la couleur rouge représente les zones de forte vibration. Les pics de vibration maximale apparaissent plus ou moins clairement sur la carte. De même, des pics secondaires sont présents ou non selon les cas. Le modèle développé précédemment permet également de tracer des cartes en ajustant les différents paramètres. Le cas optimal pour l'air (voir figure 5.22b) et l'eau (voir figure 5.22a) correspond à la réflexion nulle en bout de guide d'onde et une efficacité parfaite du trou noir acoustique. Il est à noter que la normalisation n'est pas la même pour chacune des fréquences. Ces courbes sont donc à distinguer des fonctions de réponse en fréquence où la réponse est normée relativement à une même référence pour toutes les fréquences.

### 5.7.2 Cartes dans l'air

Suivant le procédé décrit à la section (5.7.1), la carte tonotopique est tracée pour les mesures effectuées dans l'air avec la lame munie d'un trou noir acoustique (voir figure 5.23a). Sur cette carte, la relation entre la fréquence d'excitation et la localisation de la vibration apparaît clairement. La courbe de la position du point de vibration maximum

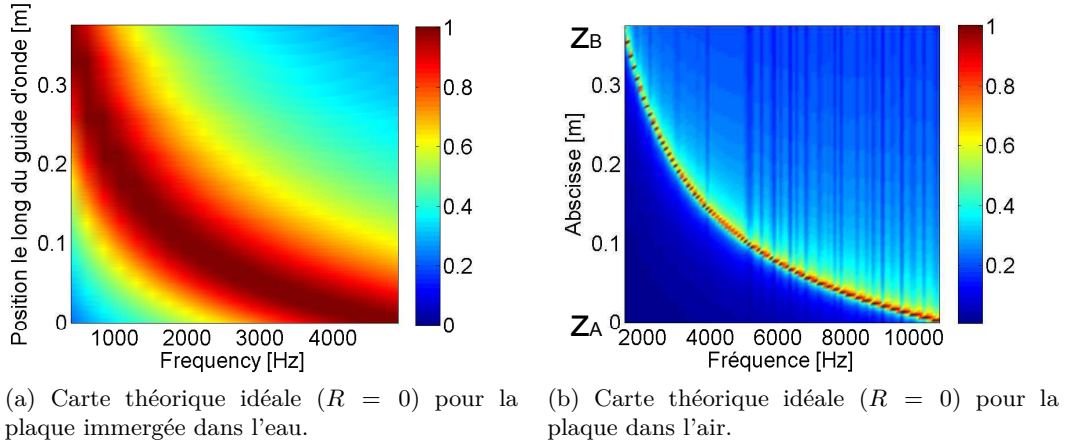


FIGURE 5.22 – Cartes tonotopiques idéales obtenues par le modèle WKB.

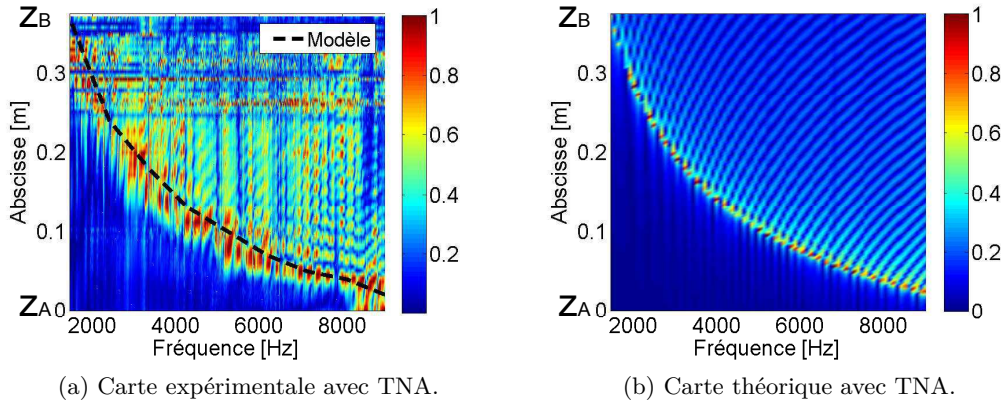


FIGURE 5.23 – Cartes tonotopiques expérimentales et théoriques pour le cas de la lame dans l'air.

est tracée afin de pouvoir comparer cette localisation à la valeur théorique donnée par le modèle. Les résultats expérimentaux montrent une bonne corrélation avec le modèle. La Zone de Vibration Maximale (ZVM), qui correspond à la couleur rouge est localisée au même endroit que la courbe du modèle. L'aire située en-dessous de la ZVM (en amont dans le guide d'onde) présente une couleur bleue quasiment uniforme ce qui signifie que la vibration est proche de zéro. L'identification et la localisation de la ZVM est facilitée par cette caractéristique. Au-dessus de la ZVM (en aval dans le guide d'onde), la zone présente une couleur relativement uniforme. Des pics secondaires apparaissent mais la vibration est nettement amortie en comparaison avec la ZVM.

La carte correspondante tracée avec le modèle (voir figure 5.23b) présente la même localisation spatio-fréquentielle de la vibration. La ZVM est également nettement repérée grâce à la zone bleue en amont. La ZVM est plus étroite et la relation spatio-fréquentielle plus précise. Le modèle présente donc une meilleure sensibilité fréquentielle. La zone en aval de la ZVM présente des pics secondaires mais également atténués. L'amplitude moyenne de la zone au-dessus de la ZVM est proche de 0,3 (bleu clair) sur l'échelle normalisée pour le modèle alors que cette valeur est proche de 0,5 (vert clair) pour les résultats expérimentaux.

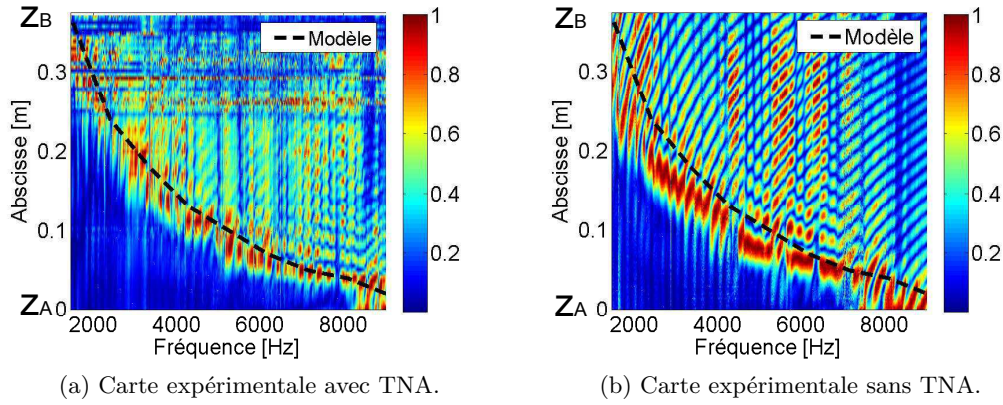


FIGURE 5.24 – Cartes tonotopiques expérimentales pour le cas de la lame dans l’air avec et sans le trou noir acoustique.

### 5.7.3 Cartes dans l’eau

La gamme de fréquence de réponse du guide d’onde dans l’eau est plus basse que pour le cas dans l’air. Les mesures effectuées dans l’eau sont fortement perturbées par les modes de vibration du bâti qui se trouvent dans la même gamme de fréquence. Malgré un renfort structural du bâti, les mesures restent perturbées. Un traitement est appliqué afin de supprimer l’influence des modes bâti sur la réponse du guide d’onde. La déformée des modes du bâti est mesurée et la déformée du segment médian de la plaque est projetée sur ces modes. Des modes de flexion et de torsion apparaissent principalement. L’effet permet de restituer quelques maxima (voir figure 5.21) mais la carte obtenue n’est pas lisible et n’est donc pas représentée ici. Quelques résultats sont donnés en annexe (voir Annexe C).

## 5.8 Effet du trou noir acoustique.

Dans cette section, l’intérêt est porté sur l’effet du trou noir acoustique. L’expérience précédente est menée avec une lame non pourvue de CMA et dont l’épaisseur est constante afin d’observer l’effet du trou noir acoustique. La carte de la figure 5.24b montre que le trou noir acoustique joue un rôle important. La ZVM se distingue mais les pics secondaires sont plus nombreux et d’amplitude quasiment équivalente à l’amplitude du pic principal. Les ondes réfléchies ont une influence sur la position du pic principal. En effet, le dédoublement de ce dernier entraîne un décalage spatial. La comparaison avec la carte expérimentale obtenue avec le trou noir acoustique (voir figure 5.24a) illustre ce décalage.

## 5.9 Conclusion et perspectives

Les expériences présentées dans ce chapitre mettent en œuvre un guide d’onde inhomogène reproduisant le fonctionnement passif de la cochlée à grande échelle. Une plaque de largeur variable est immergée entre deux canaux remplis de fluide. La vibration de la plaque s’effectue sous la forme d’une onde se propageant depuis la partie étroite du guide d’onde jusqu’à la partie large. L’amplitude de l’onde de flexion est maximale en un point précis dont la position dépend de la fréquence. Atteignant le bout du guide d’onde, l’onde pénètre dans un second guide d’onde dont l’objectif est d’atténuer la réflexion des ondes. Ce chapitre montre que la méthode WKB décrite au chapitre 3 permet de modéliser et

de dimensionner un guide d'onde de ce type. L'étude du trou noir acoustique immergé par la méthode WKB est possible et permet de contourner les problèmes numériques de la modélisation de la plaque dont l'épaisseur devient progressivement nulle. Les résultats expérimentaux comparés aux résultats théoriques montrent que l'approche analytique et l'approche expérimentale sont complémentaires et que la construction d'un guide d'onde de ce type peut apporter beaucoup à la compréhension des phénomènes se produisant dans l'oreille interne. L'effet du trou noir acoustique est estimé et il est montré que les ondes réfléchies sont réduites grâce au trou noir acoustique.

La caractérisation du trou noir acoustique immergé, par des mesures de champ et de coefficient de réflexion dans la zone de section constante, constitue la première perspective de ce travail expérimental. Cette première étape tend vers une optimisation du trou noir acoustique afin d'augmenter son efficacité. Ensuite, l'ajout d'une composante active à ce banc d'essai est l'une piste de recherche. Des matériaux piézoélectriques peuvent jouer le rôle des cellules cillées et amplifier la vibration. L'expérimentation de différentes lois de commandes et de retour actif peut permettre d'observer quelle est le modèle le plus adapté à la description d'un phénomène actif proche de celui de la cochlée. Une troisième piste consiste à ajouter un degré de liberté supplémentaire, comme au chapitre 4, afin d'observer le couplage entre les deux degrés de liberté et éventuellement la propagation couplée de deux ondes. La difficulté est de concevoir un assemblage dont le mécanisme reste simple mais suffisamment représentatif de la cinématique de l'organe de Corti. Enfin, la miniaturisation du banc d'essai doit permettre de se rapprocher d'une cochlée artificielle à l'échelle 1. La principale difficulté est de réaliser un trou noir acoustique de petite dimension.





## Chapitre 6

# Conclusion et perspectives

Plusieurs modèles sont développés dans cette thèse afin de décrire le comportement dynamique d'un guide d'onde inhomogène. Ces modèles représentent un milieu de propagation d'onde couplant un domaine solide et un domaine fluide avec un couplage fort. Ces modèles sont applicables à la modélisation passive de la cochlée. Ils peuvent également être généralisés à d'autres types de guides d'onde inhomogènes, sous certaines conditions. Les caractéristiques des ondes qui se propagent dans le guide sont identifiées.

L'originalité apportée par ce travail consiste à étudier plusieurs modes de propagation et les interactions entre eux. Les ondes évanescentes ont un nombre d'onde dont la partie imaginaire importante provoque une atténuation rapide de leur amplitude. Cependant, l'influence des modes évanescents sur la réponse globale est mise en évidence grâce au couplage pris en compte dans un nouveau modèle.

L'approche expérimentale développée dans cette thèse utilise l'un des modèles développés afin de caractériser un guide d'onde inspiré de la cochlée. Un banc d'essai est conçu, construit et testé.

La conclusion rappelle les principaux résultats numériques, analytiques et expérimentaux développés dans cette thèse et ouvre l'étude sur les perspectives de ce travail de recherche.

### 6.1 Modèles de guide d'onde inhomogène

Une approche numérique est développée dans le chapitre 2 afin d'étudier la réponse d'une structure immergée dans un fluide. La méthode par éléments finis est appliquée sur le modèle bidimensionnel d'un canal rempli de fluide dont l'une des parois latérales est une structure à impédance variable. Ce modèle permet de représenter une relation entre la fréquence et le lieu de la réponse, phénomène appelé tonotopie. Une relation similaire est obtenue en appliquant la méthode des éléments finis sur une structure à la géométrie tridimensionnelle. L'importance du couplage fort entre le fluide et la structure est mise en évidence.

Le type de modèle de structure a également une influence sur la réponse obtenue. Trois types de modèles sont représentés : un modèle de structure à réaction locale, sans couplage mécanique longitudinal ; un modèle de structure de type membrane tendue ; un modèle de type poutre. Le couplage mécanique longitudinal favorise la vibration après le lieu de vibration maximale. Ces modèles peuvent être combinés selon la structure représentée. Les modèles par éléments finis présentent les caractéristiques basiques de la tonotopie et constituent une référence qui permet de valider les modèles analytiques simples.

Une nouvelle formulation utilisant des variables d'énergie et formalisme mathématiques optimisés est également proposée. Le formalisme Hamiltonien-à-ports permet d'optimiser

le couplage entre différents système et la définition des lois de commande, ce qui peut s'avérer utile pour l'étude de la cochlée active.

Dans le chapitre 3, l'étude est portée sur un modèle de type asymptotique. Ce modèle considère la déformée dynamique sous la forme d'une onde, ce qui permet d'exprimer les caractéristiques physiques essentielles à la compréhension de la micromécanique de la cochlée. L'approche classique considère chacune des ondes se propageant indépendantes. Le modèle WKB est amélioré afin de prendre en compte un couplage des ondes. Ainsi, le premier mode, propagatif, est couplé avec les modes suivants, évanescents. La réponse sur toute la longueur du guide d'onde est reproduite fidèlement en comparaison des résultats de la méthode des éléments finis. L'influence des modes évanescents est démontrée hors des conditions aux limites.

Le chapitre 4 s'intéresse aux modes transverses de la section de la cochlée. Le mode de flexion de la membrane basilaire se couple à un mode de cisaillement de la membrane tectoriale. Le mouvement résultant stimule les cellules cillées par la flexion de leur cils. Une méthode est développée afin de déterminer des modes dans une section transverse de l'organe de Corti. Elle utilise l'approche WKB mais résoud le problème transverse par la méthode des éléments finis. La méthode est validée par comparaison avec la méthode WKB classique sur une géométrie « box modèle ». Les résultats de cette méthode sont comparés à des résultats expérimentaux de la littérature. Un couplage longitudinal mécanique est ajouté pour représenter l'onde de cisaillement qui se propage le long de la membrane basilaire.

Tous les modèles développés dans cette thèse sont récapitulés dans une table montrant les hypothèses réalisées pour chacun et les résultats obtenus (voir table 6.1).

TABLE 6.1 – Table récapitulant l'ensemble des modèles développés dans ce manuscrit. Les sigles des modèles signifient : Méthode des éléments finis (MEF) ; A deux dimensions (2D) ; A trois dimensions (3D) ; Système Hamiltonien A Ports (HAP) ; Méthode Wentzel-Kramers-Brillouin par la méthode du Lagrangien moyenné (WKB) ; Méthode Wentzel-Kramers-Brillouin par la méthode de projection sur les modes propres (WKB-P) ; Méthode Wentzel-Kramers-Brillouin par la méthode de projection sur les modes propres et couplage avec les modes évanescents (WKB-PC) ; Méthode Wentzel-Kramers-Brillouin couplée à la méthode des Éléments Finis (WKB-EF).

Modèle	Structure	Résultats	Section	Références
MEF 2D	Structure à réaction locale (1ddl)	Réponse harmonique. Déplacement structure. Champ de pression 2D. Tonotopie.	2.2.1.1	[99]
MEF 2D	Structure de type membrane (1ddl)	Réponse harmonique. Déplacement structure. Champ de pression 2D. Tonotopie. Couplage mécanique longitudinal par tension.	2.2.1.1	Nouveau

TABLE 6.1 – suite

Modèle	Structure	Résultats	Section	Références
MEF 2D	Structure de type poutre (1ddl)	Réponse harmonique. Déplacement structure. Champ de pression 2D. Tonotopie. Couplage mécanique longitudinal par raideur en flexion.	2.2.1.1	Nouveau
MEF 3D	Coque enroulée	Modes propres de la structure.	2.2.2.1	[43]
MEF 3D	Solide 3D	Modes couplés fluide structure. Réponse harmonique. Déplacement structure. Champ de pression 3D. Tonotopie. Effet de la dissipation. Influence du fluide.	2.2.2.2	Nouveau
HAP	Structure à réaction locale (1ddl)	Formulation avec les variables d'énergie. Structure mathématique optimisée.	2.3	Nouveau
WKB	Plaque sèche	Courbe de dispersion. Expression analytique des racines.	3.1.2	Nouveau
WKB	Plaque de largeur variable	Lieux des racines. Réponse harmonique. Déplacement structural 3D . Champ de pression 3D. Tonotopie. Atténuation de l'onde. Rapport entre onde incidente et onde réfléchie.	3.3.1	[131]
WKB-P	Structure à réaction locale (1ddl)	Lieux des racines. Réponse harmonique. Déplacement structural 3D . Champ de pression 3D. Tonotopie. Atténuation de l'onde. Rapport entre onde incidente et onde réfléchie. Base de modes.	3.4	[52]

TABLE 6.1 – suite

Modèle	Structure	Résultats	Section	Références
WKB-P	Structure de type membrane (1ddl)	Lieux des racines. Réponse harmonique. Déplacement structural 3D . Champ de pression 3D. Tonotopie. Atténuation de l'onde. Rapport entre onde incidente et onde réfléchie. Base de modes. Couplage mécanique longitudinal par tension.	3.4.6	[52]
WKB-P	Structure de type poutre (1ddl)	Lieux des racines. Réponse harmonique. Déplacement structural 3D . Champ de pression 3D. Tonotopie. Atténuation de l'onde. Rapport entre onde incidente et onde réfléchie. Base de modes. Couplage mécanique longitudinal par raideur en flexion.	3.4.7	[52]
WKB-PC	Structure à réaction locale (1ddl)	Lieux des racines. Réponse harmonique. Déplacement structural 3D . Champ de pression 3D. Tonotopie. Atténuation de l'onde. Rapport entre onde incidente et onde réfléchie. Base de modes. Couplage avec les modes évanescents.	3.6	Nouveau
MEF-2	Structure à réaction locale (2ddl)	Réponse harmonique. Déplacements des deux structures. Champs de pression 2d dans les deux canaux. Tonotopie.	4.1.2	Nouveau

TABLE 6.1 – suite

Modèle	Structure	Résultats	Section	Références
WKB-2	Structure à réaction locale (2ddl)	Lieux des racines (doubles). Réponse harmonique. Déplacements des deux structures. Champs de pression 2D dans les deux canaux. Tonotopie. Atténuation de l'onde. Rapport entre onde incidente et onde réfléchie. Somme des modes propagatifs.	4.1.3	[69]
WKB-EF	Solide 2D	Réponse harmonique. Champ de déplacement 2D transverse du solide. Champ de pression 2D transverse. Solution approchée des équations aux dérivées partielles dans le plan. Lieux des racines. Validation avec WKB.	4.2	Nouveau
WKB-EF	Solide 2D Organe de Corti	Réponse harmonique. Champ de déplacement 2D transverse du solide. Champ de pression 2D transverse. Solution approchée des équations aux dérivées partielles dans le plan. Lieux des racines.	4.3	[12, 9]
WKB-EF	Solide 2D couplé Organe de Corti	Réponse harmonique. Champ de déplacement 2D transverse du solide. Champ de pression 2D transverse. Solution approchée des équations aux dérivées partielles dans le plan. Lieux des racines. Couplage longitudinal par un cisaillement de la membrane tectoriale.	4.3.4	Nouveau

## 6.2 Expérimentations

Le travail expérimental présenté dans ce manuscrit consiste à représenter le comportement passif de la cochlée à grande échelle. À l'aide de la méthode WKB, un guide d'onde inhomogène est modélisé et dimensionné. Le guide d'onde est construit de façon à répondre préférentiellement dans une gamme de fréquence incluse dans la plage d'audition humaine. Un pot vibrant excite le guide d'onde et la vibration est mesurée sur toute la longueur du guide à l'aide d'un vibromètre laser. La comparaison avec les résultats du modèle montre que l'approche expérimentale et l'approche analytique sont cohérentes.

La réponse du guide d'onde correspond à la propagation d'une onde dont la longueur d'onde varie en fonction de la position le long du guide. L'amplitude de l'onde varie également au cours de sa propagation. Deux effets peuvent être distingués : la tonotopie et l'atténuation.

La tonotopie, décrite par le modèle, est retrouvée expérimentalement dans le cas où les canaux sont dans l'air. Cette relation est la base de la discrimination fréquentielle de l'oreille interne mais également pour les capteurs acoustiques inspirés de l'oreille interne.

Le second effet observé concerne l'atténuation de l'onde lors de sa propagation. Le modèle développé au chapitre 3 montre que deux ondes se propageant dans des directions opposées peuvent coexister. Ces deux ondes sont liées par les conditions aux limites aux deux extrémités du guide d'onde. L'observation d'une onde incidente se réfléchissant à l'extrémité pour ensuite se propager dans la direction opposée montre que son amplitude varie et s'atténue progressivement. L'atténuation est liée aux termes de dissipation dans le solide et dans le fluide. Le trou noir acoustique joue également un rôle dans la dissipation de l'énergie et permet d'atténuer la réflexion des ondes. Une nouvelle modélisation du trou noir acoustique est proposée pour le cas où le trou noir acoustique est immergé.

## 6.3 Perspectives

La méthode WKB est donc particulièrement bien adaptée à l'étude de la cochlée car elle est constituée d'un guide d'onde inhomogène dont la section possède une physique complexe mais qui varie peu dans la direction longitudinale. Le couplage des modes, introduit au chapitre 3, ouvre de nouvelles perspectives à l'utilisation de cette méthode dans le cadre de la mécanique cochléaire. Lorsque plusieurs modes transverses sont considérés, le couplage entre ces modes peut être pris en compte. L'intérêt dans le domaine de la mécanique cochléaire est évident car le rôle de la membrane tectoriale comme second lieu de propagation d'onde est encore méconnu. Le chapitre 4 est focalisé sur le cas où l'organe de Corti est représenté par plusieurs degrés de liberté dans le plan transverse. Les deux modes correspondant à la propagation d'une onde sur la membrane basilaire et sur la membrane tectoriale peuvent interagir à travers ce couplage.

La caractérisation des modes de l'organe de Corti est également une piste de recherche. Le modèle développé au chapitre 4 permet l'étude des déformations dans le plan transverse à la propagation de l'onde. Le modèle par la méthode des éléments finis ne comprend que des domaines solides et fluides mais peut être étendu à d'autres physiques. La prise en compte d'un matériau poro-élastique afin de représenter les cellules piliers peut permettre de résoudre le problème de surpression sous la membrane tectoriale. La physique de l'espace subtectoriale peut aussi être représentée par ce type de modèle.

La principale perspective de cette thèse reste l'aspect actif qui n'est pas abordé ici. L'ajout de matériaux piézoélectriques dans la section transverse pour représenter la mobilité somatique des cellules cillées externes est une voie intéressante pour prendre en compte l'aspect

actif de la cochlée. La difficulté est de représenter un système non-linéaire. La méthode utilisée doit alors être adaptée.

D'un point de vue expérimental, le banc d'essai réalisé peut subir plusieurs évolutions. L'aspect actif peut être représenté par une série de patchs piézoélectriques reliés et commandés les uns par rapport aux autres. La seconde voie d'évolution serait d'ajouter un degré de liberté à la plaque en flexion pour représenter le degré de liberté de la membrane tectoriale.

Le formalisme des systèmes Hamiltoniens-à-ports est une voie adaptée à l'étude des phénomènes actifs. Pour la cochlée artificielle, comme pour la cochlée réelle, le couplage de l'énergie électrochimique aux énergies mécaniques et acoustiques peut être facilité par l'utilisation de ce formalisme.

Les différents travaux réalisés dans cette thèse sont représentés et mis en relation avec les perspectives sur la figure 6.1.

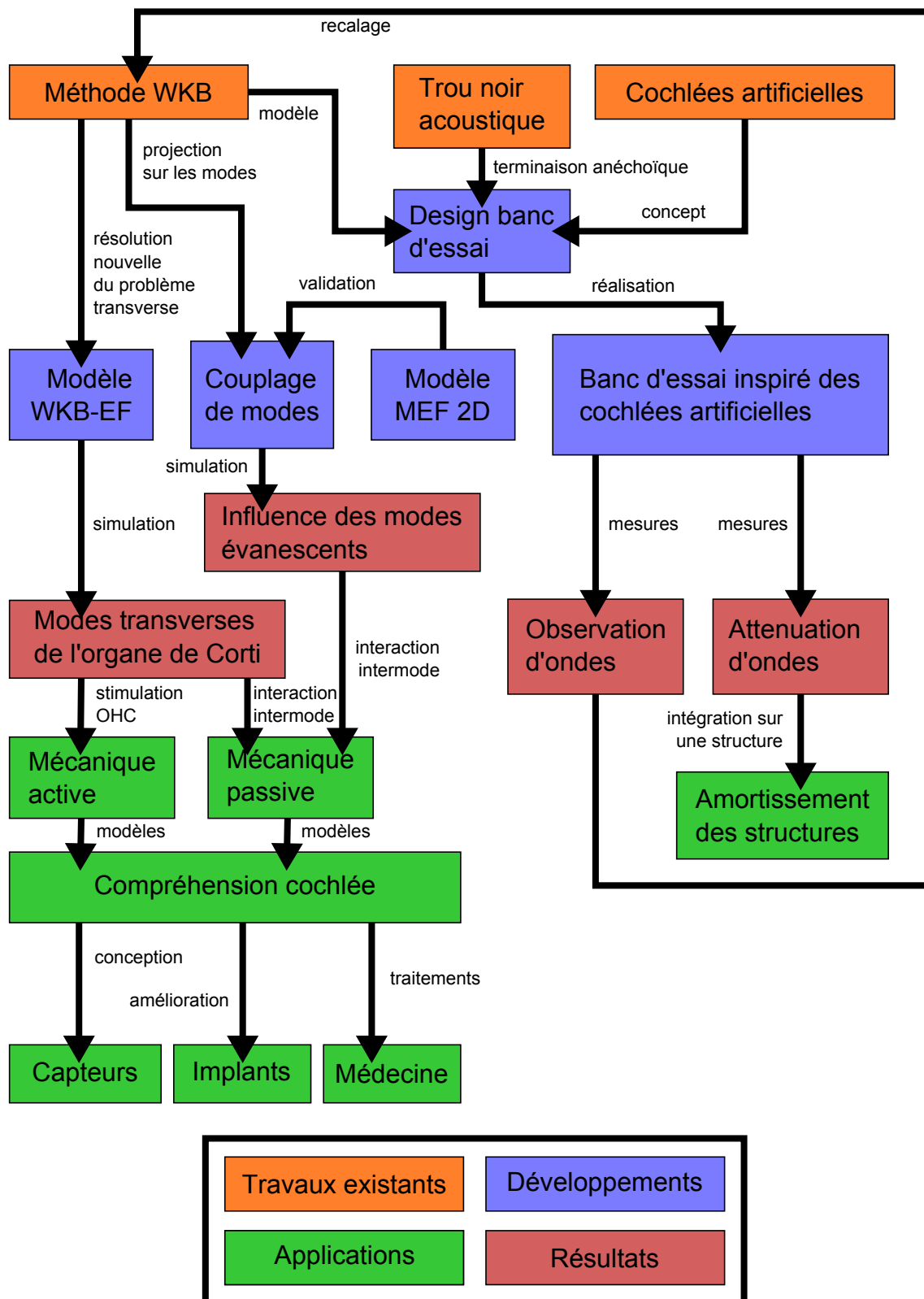


FIGURE 6.1 – Schéma récapitulatif des principaux travaux réalisés dans cette thèse.



## Annexe A

# Définition des niveaux de son

Le son est une variation alternative de la pression d'équilibre dans l'air (ou dans un autre milieu propagatif). La pression acoustique est définie comme la variation de cette pression. Afin de définir le niveau d'un son, l'échelle des décibels est utilisée. Plusieurs types d'échelles existent.

Le **dB SPL**, pour Sound Pressure Level, correspond à la définition physique du niveau de son. La pression du son mesuré est comparé par rapport à une pression acoustique de référence. Lorsque la pression acoustique est égale à la pression de référence, le niveau est de 0 dB. Dans les autres cas, le niveau en dB SPL est donné par :

$$X_{dB} = 20 \log_{10} \left( \frac{p}{p_0} \right) \quad (\text{A.1})$$

où  $p_0$  est la pression acoustique de référence,  $p$  est la pression acoustique mesurée. La pression de référence est définie par rapport à une puissance acoustique de  $1.10^{-12} [W.m^{-2}]$ . Cette puissance correspond à une pression de référence :

$$p_0 = 20 \mu Pa = 2.10^{-5} Pa \quad (\text{A.2})$$

Cette échelle correspond à la physique mais n'est pas adaptée à notre perception du son. Le **dB A** est une échelle inspirée de l'échelle des dB SPL mais adaptée à la perception humaine du son. Fletcher [35] montre que la perception du niveau de son par l'être humain est meilleure dans la gamme de fréquence moyenne (entre 1000 et 4000 Hz) que pour les basses fréquences ou les hautes fréquences. Les courbes qu'il trace montre l'évolution de ces niveaux perçus avec la fréquence (voir figure (1.10)). L'échelle des décibels A applique une pondération au son mesuré en fonction de la fréquence du son. La pondération est basée sur la courbe isotone à 40 dB SPL. Par exemple, un son harmonique ayant un niveau de 40dB SPL à une fréquence de 500 Hz, se voit appliquer une correction de -20dB et a un niveau d'environ 20dB A. Cette pondération permet de définir une norme pour la mesure des sons.

Les échelles de décibels B et C sont construites sur le même principe que l'échelle dB A mais définissent des corrections différentes (voir figure (A.1)).

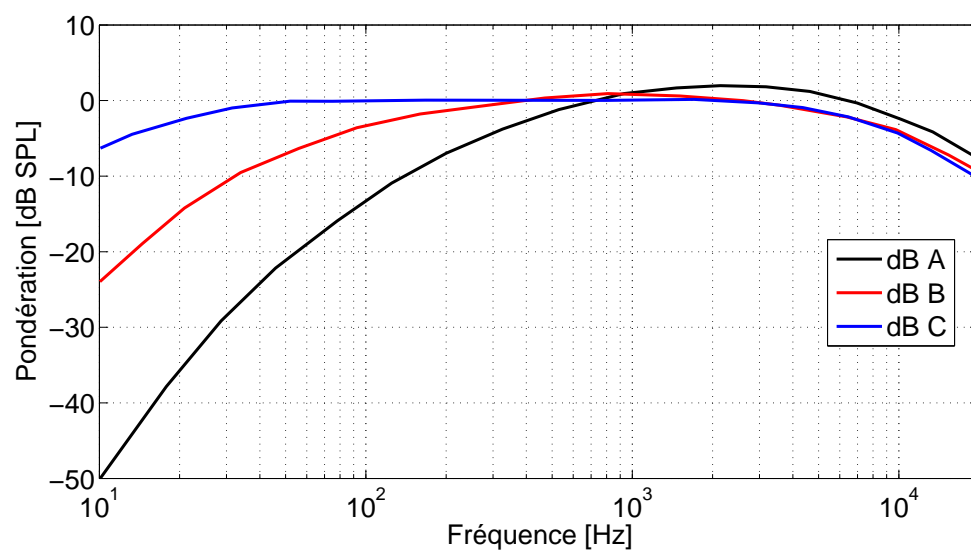


FIGURE A.1 – Courbe de pondération des échelles de dB A, B et C.

## Annexe B

# Résolution de l'équation eikonale pour une plaque en flexion dans le vide

L'équation eikonale d'une plaque en flexion peut se ramener à une équation du type (voir 3.25) :

$$f(z, k_z, \omega) = A(z)k_z^4 + B(z)k_z + C(z) = 0 \quad (\text{B.1})$$

où les facteurs  $A(z)$ ,  $B(z)$  et  $C(z)$  sont définis à partir des paramètres de la plaque :

$$A(z) = D_f \int_{-b/2}^{b/2} v_x^2 dx \quad (\text{B.2})$$

$$B(z) = -2D_f \int_{-b/2}^{b/2} v_x \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} dx \quad (\text{B.3})$$

$$C(z) = D_f \int_{-b/2}^{b/2} v_x \frac{\partial^4 v_x}{\partial x^4} dx - \omega^2 \rho_s b h \quad (\text{B.4})$$

Cette équation est une équation bicarrée en  $k_z$ . Pour chacune des sections (à  $z$  fixé), cette équation admet quatre solutions dans le plan complexe. Cette équation peut se mettre sous la forme d'une équation du second degré en effectuant le changement de variable ( $k_z^2 \rightarrow K_z$ ).

$$f(z, k_z, \omega) = 0 \Leftrightarrow F(z, K_z, \omega) = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$F(z, K_z, \omega) = A(z)K_z^2 + B(z)K_z + C(z) = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$(\text{B.7})$$

Dans le cas d'une plaque en flexion, les termes  $A(z)$  et  $B(z)$  sont toujours positifs et le signe du terme  $C(z)$  dépend de la valeur de  $\omega$ . Pour simplifier les calculs, les notations suivantes sont adoptées :

$$c_1 = D_f \int_{-b/2}^{b/2} v_x \frac{\partial^4 v_x}{\partial x^4} dx \quad (\text{B.8})$$

$$c_2 = \rho_s b h \quad (\text{B.9})$$

$$C(z) = c_1 - c_2 \omega^2 \quad (\text{B.10})$$

La fonction eikonale est exprimée sous la forme :

$$F = A \left( K_z + \frac{B}{2A} \right)^2 + c_2 \omega_0^2 \left[ 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right] \quad (\text{B.11})$$

$$\text{avec} \quad \omega_0^2 = \left( \frac{c_1}{c_2} - \frac{B^2}{4Ac_2} \right) \quad (\text{B.12})$$

Le terme  $\omega_0^2$  est positif. Pour le prouver, il suffit de considérer l'espace des fonctions continues par morceaux sur l'intervalle  $[-\frac{b}{2}; \frac{b}{2}]$ . Les fonctions  $v_x(x)$  et  $\frac{\partial v_x^2(x)}{\partial x^2}$  font partie de cet espace. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors :

$$\left[ \int_{-b/2}^{b/2} v_x \frac{\partial v_x^2}{\partial x^2} dx \right]^2 \leq \left[ \int_{-b/2}^{b/2} (v_x)^2 dx \right] \left[ \int_{-b/2}^{b/2} \left( \frac{\partial v_x^2}{\partial x^2} \right)^2 dx \right] \quad (\text{B.13})$$

En utilisant deux intégrations par partie successives, la relation suivante est obtenue :

$$\int_{-b/2}^{b/2} v_x \frac{\partial^4 v_x}{\partial x^4} dx = \left[ \int_{-b/2}^{b/2} \left( \frac{\partial v_x^2}{\partial x^2} \right)^2 dx \right] - \left[ v_x \frac{\partial^3 v_x}{\partial x^3} \right]_{-b/2}^{b/2} + \left[ \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \frac{\partial v_x}{\partial x} \right]_{-b/2}^{b/2} \quad (\text{B.14})$$

Les deux derniers termes correspondent à des conditions limites. Dans le cas considérés de la plaque encastées sur ses deux bords, ces termes sont nuls et l'inégalité (B.13) devient :

$$\left[ \int_{-b/2}^{b/2} v_x \frac{\partial v_x^2}{\partial x^2} dx \right]^2 \leq \left[ \int_{-b/2}^{b/2} (v_x)^2 dx \right] \left[ \int_{-b/2}^{b/2} v_x \frac{\partial^4 v_x}{\partial x^4} dx \right] \quad (\text{B.15})$$

Le terme  $\omega_0^2$  peut s'exprimer sous la forme :

$$\omega_0^2 = \frac{D_f}{\rho_s b h} \left( \int_{-b/2}^{b/2} v_x \frac{\partial^4 v_x}{\partial x^4} dx - \frac{\int_{-b/2}^{b/2} v_x \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} dx}{\int_{-b/2}^{b/2} v_x \frac{\partial^4 v_x}{\partial x^4} dx} \right) \quad (\text{B.16})$$

D'après B.15, ce terme est positif et la pulsation  $\omega_0$  est réelle. Trois cas se présentent alors et sont détaillés ci-après.

## B.1 Cas 1

Lorsque  $\omega < \omega_0$ , deux solutions complexes existent pour  $F(K_z) = 0$  :

$$K_1 = -\frac{B}{2A} + i \sqrt{\frac{c_2 \omega_0^2}{A} \left[ 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right]} \quad (\text{B.17})$$

$$K_2 = -\frac{B}{2A} - i \sqrt{\frac{c_2 \omega_0^2}{A} \left[ 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right]} \quad (\text{B.18})$$

Pour le nombre d'onde  $k_z$ , quatre solutions complexes sont conjuguées et opposées deux à deux :

$$k_1 = k_{re} + i k_{im} \quad (\text{B.19})$$

$$k_2 = k_{re} - i k_{im} \quad (\text{B.20})$$

$$k_3 = -k_{re} + i k_{im} \quad (\text{B.21})$$

$$k_4 = -k_{re} - i k_{im} \quad (\text{B.22})$$

$$(\text{B.23})$$

avec

$$k_{re} = 1/2 \sqrt{-\frac{B}{A} + 2 \sqrt{1/4 \frac{B^2}{A^2} + \frac{c_2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{A}}} \quad (\text{B.24})$$

$$k_{im} = \sqrt{\frac{c_2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{A}} \frac{1}{\sqrt{-\frac{B}{A} + 2 \sqrt{1/4 \frac{B^2}{A^2} + \frac{c_2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{A}}}} \quad (\text{B.25})$$

A noter que le rapport entre la partie imaginaire et la partie réelle du nombre d'onde s'exprime simplement par :

$$\frac{k_{im}}{k_{re}} = 2 \sqrt{\frac{c_2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{A}} \quad (\text{B.26})$$

## B.2 Cas 2

Lorsque  $\omega = \omega_0$ , une solution réelle double existe pour  $F(K_z) = 0$  :

$$K_1 = -\frac{B}{2A} \quad (\text{B.27})$$

$$K_2 = -\frac{B}{2A} \quad (\text{B.28})$$

Les nombres d'onde solutions  $k_z$  sont doubles également :

$$k_1 = i \sqrt{\frac{B}{2A}} \quad (\text{B.29})$$

$$k_2 = -i \sqrt{\frac{B}{2A}} \quad (\text{B.30})$$

$$k_3 = i \sqrt{\frac{B}{2A}} \quad (\text{B.31})$$

$$k_4 = -i \sqrt{\frac{B}{2A}} \quad (\text{B.32})$$

## B.3 Cas 3

Lorsque  $\omega > \omega_0$ , deux solutions réelles existent pour  $F(K_z) = 0$  :

$$K_1 = -\frac{B}{2A} + \sqrt{\frac{c_2 \omega_0^2}{A} \left[ \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right]} \quad (\text{B.33})$$

$$K_2 = -\frac{B}{2A} - \sqrt{\frac{c_2 \omega_0^2}{A} \left[ \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right]} \quad (\text{B.34})$$

Pour la valeur du nombre d'onde  $k_z$ , trois cas se présentent selon la valeur de  $\omega$  par rapport à  $\omega_1$  définie par :

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 + \frac{B^2}{4Ac_2} \quad (\text{B.35})$$

### B.3.1 Sous-cas 1

Lorsque  $\omega_1 > \omega > \omega_0$ , la relation suivante est vérifiée :

$$\sqrt{\frac{c_2\omega_0^2}{A} \left[ \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right]} < \frac{B}{2A} \quad (\text{B.36})$$

Les solutions pour le nombre d'onde  $k_z$  sont :

$$k_1 = i\sqrt{+\frac{B}{2A} - \sqrt{\frac{c_2\omega_0^2}{A} \left[ \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right]}} \quad (\text{B.37})$$

$$k_2 = -i\sqrt{+\frac{B}{2A} - \sqrt{\frac{c_2\omega_0^2}{A} \left[ \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right]}} \quad (\text{B.38})$$

$$k_3 = i\sqrt{+\frac{B}{2A} + \sqrt{\frac{c_2\omega_0^2}{A} \left[ \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right]}} \quad (\text{B.39})$$

$$k_4 = -i\sqrt{+\frac{B}{2A} + \sqrt{\frac{c_2\omega_0^2}{A} \left[ \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right]}} \quad (\text{B.40})$$

### B.3.2 Sous-cas 2

Lorsque  $\omega = \omega_1 > \omega_0$ , la relation suivante est vérifiée :

$$\sqrt{\frac{c_2\omega_0^2}{A} \left[ \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right]} = \frac{B}{2A} \quad (\text{B.41})$$

Les solutions pour le nombre d'onde  $k_z$  sont :

$$k_1 = i\sqrt{\frac{B}{A}} \quad (\text{B.42})$$

$$k_2 = -i\sqrt{\frac{B}{A}} \quad (\text{B.43})$$

$$k_3 = 0 \quad (\text{B.44})$$

$$k_4 = 0 \quad (\text{B.45})$$

### B.3.3 Sous-cas 3

Lorsque  $\omega > \omega_1 > \omega_0$ , la relation suivante est vérifiée :

$$\sqrt{\frac{c_2\omega_0^2}{A} \left[ \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right]} > \frac{B}{2A} \quad (\text{B.46})$$

Les solutions pour le nombre d'onde  $k_z$  sont :

$$k_1 = \sqrt{-\frac{B}{2A} + \sqrt{\frac{c_2\omega_0^2}{A} \left[ \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right]}} \quad (\text{B.47})$$

$$k_2 = -\sqrt{-\frac{B}{2A} + \sqrt{\frac{c_2\omega_0^2}{A} \left[ \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right]}} \quad (\text{B.48})$$

$$k_3 = i\sqrt{+\frac{B}{2A} + \sqrt{\frac{c_2\omega_0^2}{A} \left[ \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right]}} \quad (\text{B.49})$$

$$k_4 = -i\sqrt{+\frac{B}{2A} + \sqrt{\frac{c_2\omega_0^2}{A} \left[ \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right]}} \quad (\text{B.50})$$

## B.4 Bilan

Les solutions de l'équation eikonale pour une plaque en flexion sont résolues numériquement à l'aide du logiciel Maple© (voir figure B.1). Pour une position donnée, la variation

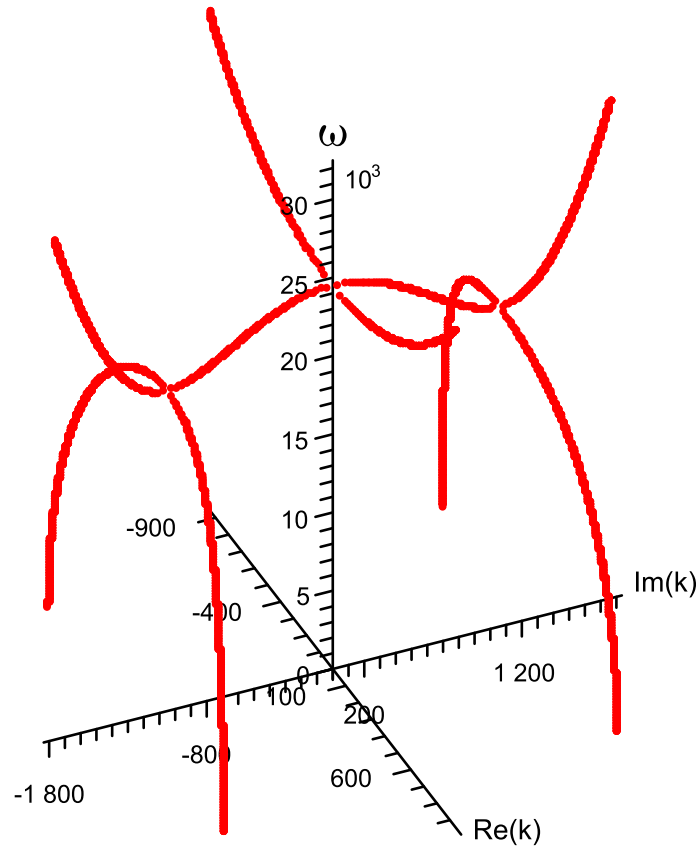


FIGURE B.1 – Tracé des nombres d'ondes  $k_z$  solution de l'équation (3.26) dans le plan complexe pour en fonction de la pulsation  $\omega$ .

de la pulsation  $\omega$  par rapport aux paramètres  $\omega_0$  et  $\omega_1$  fait apparaître différents modes de vibrations. Inversement, pour une pulsation  $\omega$  donnée, la variation des paramètres de la

section fait varier les paramètres  $\omega_0$  et  $\omega_1$ . Dans le cas de la plaque en flexion, les deux paramètres sont donnés par :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D_f}{\rho_s b h} \left( \int_{-b/2}^{b/2} v_x \frac{\partial^4 v_x}{\partial x^4} dx - \frac{\int_{-b/2}^{b/2} v_x \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} dx}{\int_{-b/2}^{b/2} v_x \frac{\partial^4 v_x}{\partial x^4} dx} \right)} \quad (\text{B.51})$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D_f \int_{-b/2}^{b/2} v_x \frac{\partial^4 v_x}{\partial x^4} dx}{\rho_s b h}} \quad (\text{B.52})$$

Les résultats sont rassemblés dans la table suivante : où les termes  $k_{re}$ ,  $k_{im}$ ,  $k_{\omega_0}$ ,  $k_{\omega_0-1-}$ ,

Valeur de $\omega$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$
$\omega < \omega_0$	$k_{re} + ik_{im}$	$k_{re} - ik_{im}$	$-k_{re} + ik_{im}$	$-k_{re} - ik_{im}$
$\omega = \omega_0$	$ik_{\omega_0}$	$-ik_{\omega_0}$	$ik_{\omega_0}$	$-ik_{\omega_0}$
$\omega_0 < \omega < \omega_1$	$ik_{\omega_0-1-}$	$-ik_{\omega_0-1-}$	$ik_{\omega_0-1+}$	$-ik_{\omega_0-1+}$
$\omega = \omega_1$	$ik_{\omega_1}$	$-ik_{\omega_1}$	0	0
$\omega_1 < \omega$	$ik_{\omega_1+}$	$-ik_{\omega_1+}$	$-k_{\omega_0-1+}$	$-k_{\omega_0-1+}$

TABLE B.1 – Solutions de l'équation eikonale pour une plaque en flexion.

$k_{\omega_0-1+}$ ,  $k_{\omega_1}$  et  $k_{\omega_1+}$  sont définis par :

$$k_{re} = 1/2 \sqrt{-\frac{B}{A} + 2 \sqrt{1/4 \frac{B^2}{A^2} + \frac{c_2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{A}}} \quad (\text{B.53})$$

$$k_{im} = \sqrt{\frac{c_2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{A}} \frac{1}{\sqrt{-\frac{B}{A} + 2 \sqrt{1/4 \frac{B^2}{A^2} + \frac{c_2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{A}}}} \quad (\text{B.54})$$

$$k_{\omega_0} = \sqrt{\frac{B}{2A}} \quad (\text{B.55})$$

$$k_{\omega_0-1-} = \sqrt{+\frac{B}{2A} - \sqrt{\frac{c_2 \omega_0^2}{A} \left[ \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right]}} \quad (\text{B.56})$$

$$k_{\omega_0-1+} = \sqrt{+\frac{B}{2A} + \sqrt{\frac{c_2 \omega_0^2}{A} \left[ \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right]}} \quad (\text{B.57})$$

$$k_{\omega_1} = \sqrt{\frac{B}{A}} \quad (\text{B.58})$$

$$k_{\omega_1+} = \sqrt{-\frac{B}{2A} + \sqrt{\frac{c_2 \omega_0^2}{A} \left[ \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right]}} \quad (\text{B.59})$$



## Annexe C

# Résultats expérimentaux

### C.1 Modes bâti

Les mesures expérimentales réalisées sur le banc d'essai à l'aide du laser à balayage fournissent des données relatives à la vibration du bâti. A basse fréquence, des modes de torsion (voir figure C.1) et de flexion du bâti (voir figure C.2) apparaissent. La réponse du segment médian est projetée sur les modes mesurés du bâti.

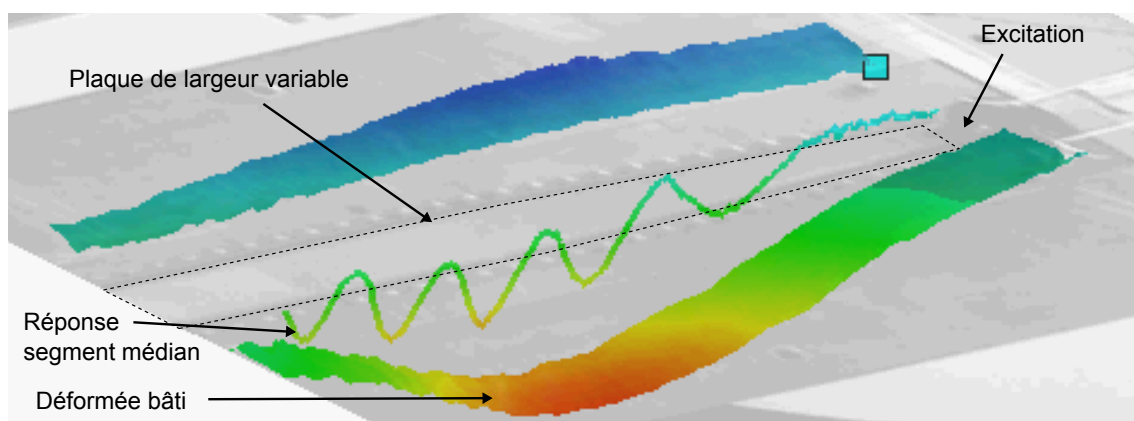


FIGURE C.1 – Mode de torsion mesuré du bâti à 704 Hz.

### C.2 Réponses dans l'air

La réponse dans l'air à moyenne fréquence (voir figure 5.6) est complétée par des mesures à basse fréquence (voir figure C.3) et à plus haute fréquence (voir figure C.4). La localisation du point de réponse maximum est proche de la position obtenue par le modèle WKB.

### C.3 Réponses dans l'eau

Pour certaines fréquences, les mesures dans le cas de la plaque de largeur variable immergée entre deux canaux remplis d'eau sont exploitées et comparées aux résultats du modèle WKB. Les résultats sont comparés pour une basse fréquence, une fréquence moyenne et une haute fréquence.

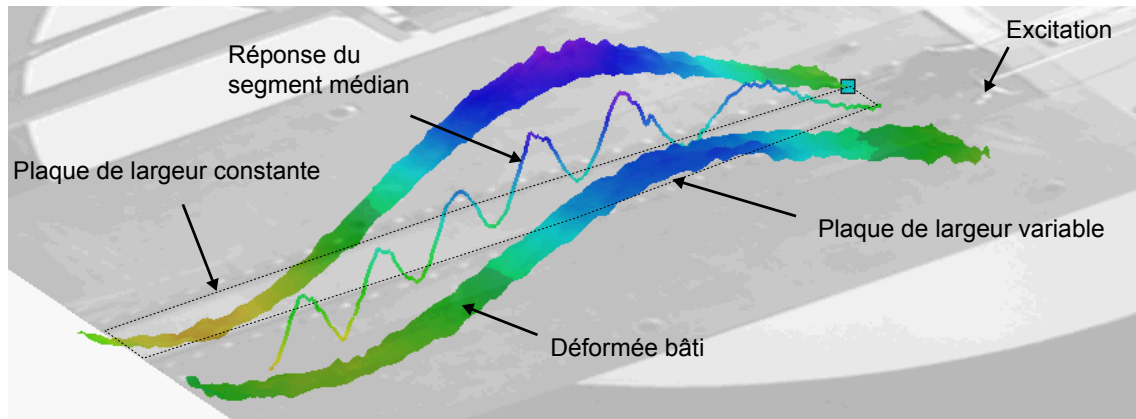
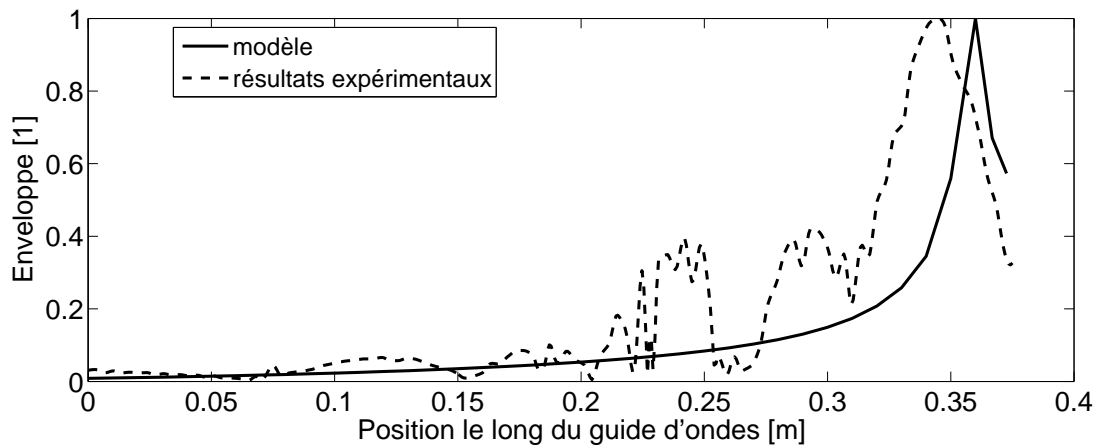
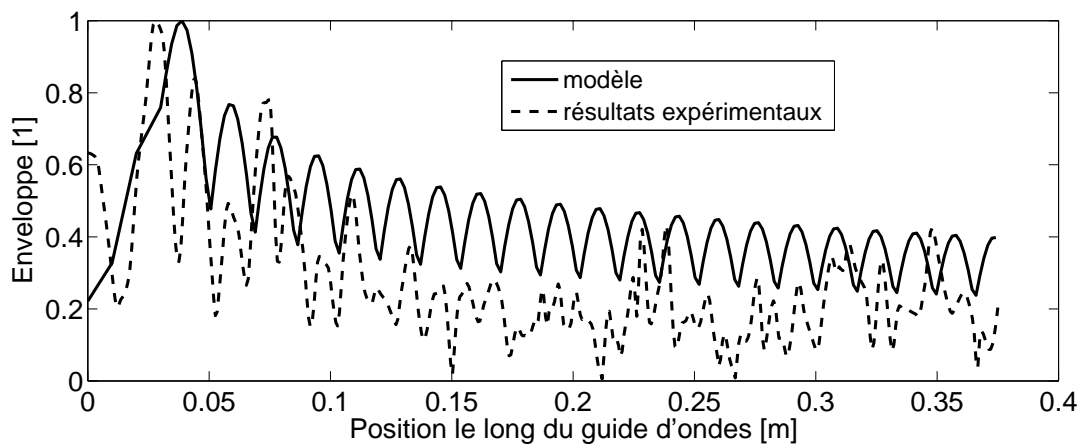


FIGURE C.2 – Mode de flexion mesuré du bâti à 886 Hz.

FIGURE C.3 – Comparaison de la courbe enveloppe mesurée expérimentalement avec le modèle WKB pour  $f = 1523$  Hz dans l'air.FIGURE C.4 – Comparaison de la courbe enveloppe mesurée expérimentalement avec le modèle WKB pour  $f = 8723$  Hz dans l'air.

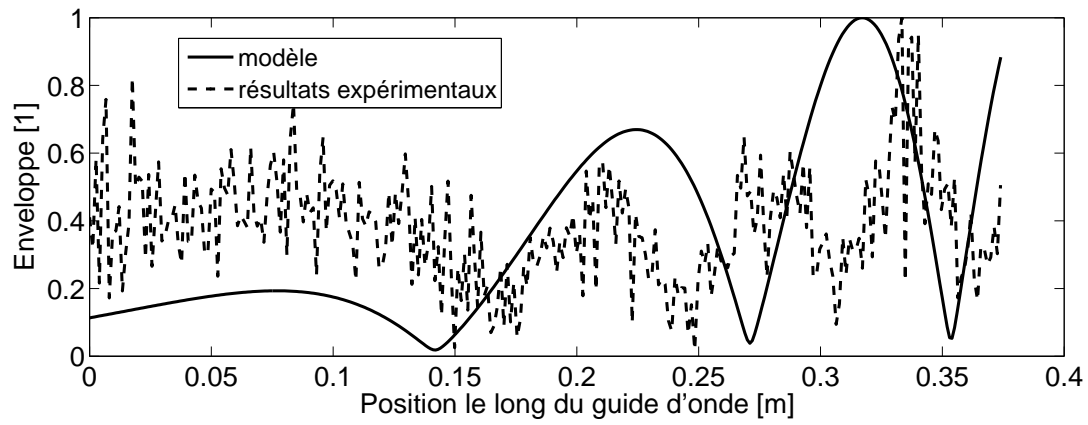


FIGURE C.5 – Comparaison de la courbe enveloppe mesurée expérimentalement avec le modèle WKB pour  $f = 434$  Hz dans l'eau.

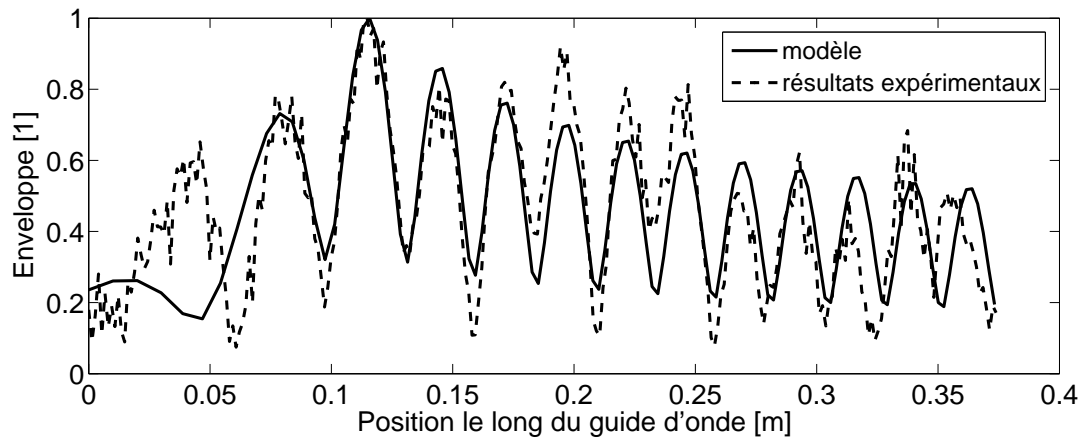


FIGURE C.6 – Comparaison de la courbe enveloppe mesurée expérimentalement avec le modèle WKB pour  $f = 1721$  Hz dans l'eau.

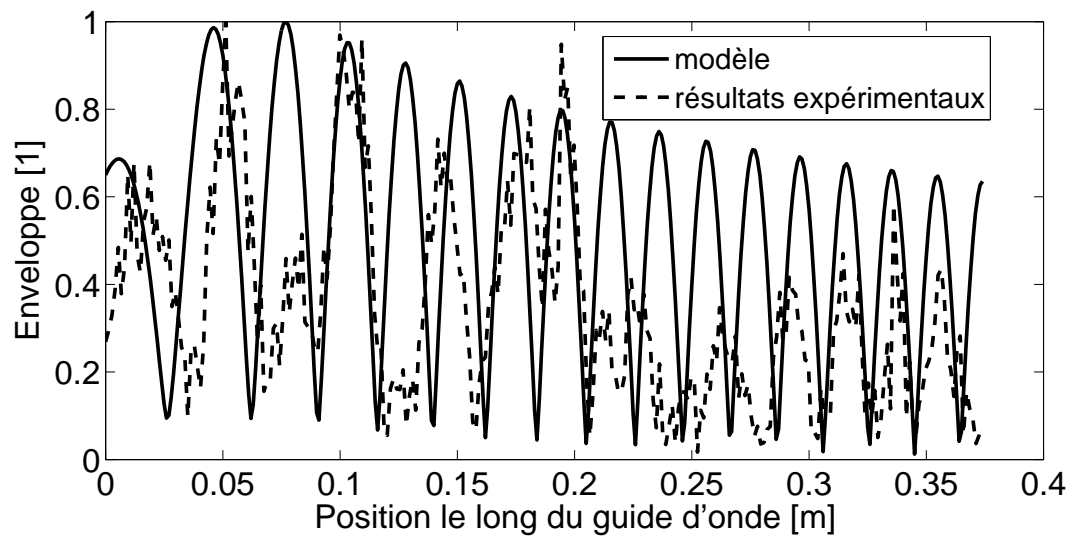


FIGURE C.7 – Comparaison de la courbe enveloppe mesurée expérimentalement avec le modèle WKB pour  $f = 3131$  Hz dans l'eau.

# Bibliographie

- [1] AIBARA, R., WELSH, J. T., PURIA, S., AND GOODE, R. L. Human middle-ear sound transfer function and cochlear input impedance. *Hearing Research* 152, 1-2 (2001), 100–109.
- [2] ASHMORE, J., AVAN, P., BROWNELL, W. E., DALLOS, P., DIERKES, K., FETTIPLACE, R., GROSH, K., HACKNEY, C., HUDSPETH, A. J., JÜLICHER, F., LINDNER, B., MARTIN, P., MEAUD, J., PETIT, C., SANTOS SACCHI, J. R., AND CANLON, B. The remarkable cochlear amplifier. *Hearing Research* 266 (2010), 1–17.
- [3] BACHMAN, M., ZENG, F., XU, T., AND LI, G. Micromechanical resonator array for an implantable bionic ear. *Audiology and Neurotology* 11, 2 (2006), 95–103.
- [4] BAUMGART, J. *The Hair Bundle : Fluid-Structure Interaction in the Inner Ear*. PhD thesis, Sächsische Landesbibliothek-Staats-und Universitätsbibliothek Dresden, 2010.
- [5] BAYOD, J. Experimental study of vibration damping in a modified elastic wedge of power-law profile. *Journal of Vibration and Acoustics* 133 (2011), 061003.
- [6] BONNET, A., AND LUNEAU, J. *Théorie de la Dynamique des Fluides*, vol. 18. 1989.
- [7] BROWNELL, W., BADER, C., BERTRAND, D., AND DE RIBAUPIERRE, Y. Evoked mechanical responses of isolated cochlear outer hair cells. *Science* 227, 4683 (1985), 194–196.
- [8] BROWNELL, W., JACOB, S., HAKIZIMANA, P., ULFENDAHL, M., FRIDBERGER, A., SHERA, C., AND OLSON, E. Decreasing outer hair cell membrane cholesterol increases cochlear electromechanics. In *AIP Conference Proceedings-American Institute of Physics* (2011), vol. 1403, p. 148.
- [9] CAI, H., AND CHADWICK, R. Radial structure of traveling waves in the inner ear. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 63, 4 (2003), 1105–1120.
- [10] CAI, H., CHADWICK, R. S., AND MANOUSSAKI, D. Wave propagation in a complex cochlear micromechanics model with curvature. *Auditory Mechanisms : Processes and Models* (2006), 498–499. Times Cited : 0 Nuttal, AL 9th International Symposium on Auditory Mechanisms JUL 23-28, 2005 Portland, OR.
- [11] CAI, H., MANOUSSAKI, D., AND CHADWICK, R. Effects of coiling on the micro-mechanics of the mammalian cochlea. *Journal of The Royal Society Interface* 2, 4 (2005), 341.
- [12] CAI, H., SHOELSON, B., AND CHADWICK, R. Evidence of tectorial membrane radial motion in a propagating mode of a complex cochlear model. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 101, 16 (2004), 6243.
- [13] CAIRNS, R., AND LASHMORE-DAVIES, C. Mode conversion of a propagating to nonpropagating wave. *Physics of Fluids* 29 (1986), 3639.

- [14] CALMELS, M., SALIBA, I., WANNA, G., COCHARD, N., FILLAUX, J., DEGUINE, O., AND FRAYSSE, B. Speech perception and speech intelligibility in children after cochlear implantation. *International journal of pediatric otorhinolaryngology* 68, 3 (2004), 347–351.
- [15] CANNELL, J. *Cochlear models*. PhD thesis, 1969.
- [16] CHADWICK, R. Three dimensional effects on low frequency cochlear mechanics. *Mechanics research communications* 12, 4 (1985), 181–186.
- [17] CHADWICK, R., DIMITRIADIS, E., AND IWASA, K. Active control of waves in a cochlear model with subpartitions. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 93, 6 (1996), 2564.
- [18] CHADWICK, R., MANOUSSAKI, D., DIMITRIADIS, E., SHOELSON, B., KETTEN, D., ARRUDA, J., AND OMALLEY, J. Cochlear coiling and low-frequency hearing. *Passive and Active Structural Acoustic Filtering in Cochlear Mechanics* (2006).
- [19] CHENG, L. *Cochlear-based transducers : Modeling and design*. PhD thesis, 2007.
- [20] CHENG, L., WHITE, R., AND GROSH, K. Three-dimensional viscous finite element formulation for acoustic fluid-structure interaction. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 197, 49-50 (2008), 4160–4172.
- [21] COOPER, N. Harmonic distortion on the basilar membrane in the basal turn of the guinea-pig cochlea. *The Journal of Physiology* 509, 1 (1998), 277.
- [22] CUENCA, J. *Wave models for the flexural vibrations of thin plates*. PhD thesis, Université du Maine, Le Mans, France, 2009.
- [23] DALLOS, P. The active cochlea. *Journal of Neuroscience* 12, 12 (1992), 4575–4585.
- [24] DALLOS, P. Overview : cochlear neurobiology. *The cochlea* (1996), 1–43.
- [25] DALLOS, P. Organ of corti kinematics. *Jaro-Journal of the Association for Research in Otolaryngology* 4, 3 (2003), 416–421.
- [26] DALLOS, P., ZHENG, J., AND CHEATHAM, M. Prestin and the cochlear amplifier. *The Journal of physiology* 576, 1 (2006), 37–42.
- [27] DE BOER, E., AND MACKAY, R. Reflections on reflections. *The Journal of the Acoustical Society of America* 67 (1980), 882.
- [28] DE BOER, E., AND VIERGEVER, M. Validity of the liouville-green (or wkb) method for cochlear mechanics. *Hearing research* 8, 2 (1982), 131–155.
- [29] DIMITRIADIS, E., AND CHADWICK, R. Solution of the inverse problem for a linear cochlear model : A tonotopic cochlear amplifier. *The Journal of the Acoustical Society of America* 106 (1999), 1880.
- [30] DOMENICA KARAVITAKI, K., AND MOUNTAIN, D. Evidence for outer hair cell driven oscillatory fluid flow in the tunnel of corti. *Biophysical journal* 92, 9 (2007), 3284–3293.
- [31] DONG, W., AND OLSON, E. Generation of distortion product otoacoustic emissions in the gerbil cochlea. In *American Institute of Physics Conference Series* (2011), vol. 1403, pp. 273–278.
- [32] DUIFHUIS, H., SHERA, C., AND OLSON, E. Hopf-bifurcations and van der pol oscillator models of the mammalian cochlea. In *AIP Conference Proceedings-American Institute of Physics* (2011), vol. 1403, p. 199.
- [33] EDGE, R., EVANS, B., PEARCE, M., RICHTER, C., HU, X., AND DALLOS, P. Morphology of the unfixed cochlea. *Hearing research* 124, 1-2 (1998), 1–16.

- [34] FLEISCHER, M., HARASZTOSI, C., NOWOTNY, M., ZAHNERT, T., GUMMER, A., SHERA, C., AND OLSON, E. Continuum mechanical model of the outer hair cell. In *AIP Conference Proceedings-American Institute of Physics* (2011), vol. 1403, p. 160.
- [35] FLETCHER, H. Loudness, its definition, measurement and calculation. *The Journal of the Acoustical Society of America* (1933), 377.
- [36] FORGE, A., LI, L., CORWIN, J., AND NEVILL, G. Ultrastructural evidence for hair cell regeneration in the mammalian inner ear. *Science* 259, 5101 (1993), 1616.
- [37] FOUCAUD, S., MICHON, G., MORLIER, J., AND GOURINAT, Y. Harmonic response of the organ of corti : Results for wave dispersion. C. A. Shera and E. S. Olson, Eds., vol. 1403, AIP, pp. 569–575.
- [38] FRAYSSE, B., MACÍAS, Á., STERKERS, O., BURDO, S., RAMSDEN, R., DEGUINE, O., KLENZNER, T., LENARZ, T., RODRIGUEZ, M., VON WALLENBERG, E., ET AL. Residual hearing conservation and electroacoustic stimulation with the nucleus 24 contour advance cochlear implant. *Otology & Neurotology* 27, 5 (2006), 624.
- [39] GEORGIEV, V., CUENCA, J., GAUTIER, F., SIMON, L., AND KRYLOV, V. Damping of structural vibrations in beams and elliptical plates using the acoustic black hole effect. *Journal of sound and vibration* 330 (2011), 2497–2508.
- [40] GEORGIEV, V. B., CUENCA, J., GAUTIER, F., AND SIMON, L. Vibration reduction of beams and plates using acoustic black hole effect. *Proceedings Internoise 2010, Lisbonne* (2010).
- [41] GHAFFARI, R., ARANYOSI, A., AND FREEMAN, D. Longitudinally propagating traveling waves of the mammalian tectorial membrane. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 104, 42 (2007), 16510.
- [42] GHAFFARI, R., FARRAHI, S., ARANYOSI, A., RICHARDSON, G., FREEMAN, D., SHERA, C., AND OLSON, E. Tectorial membrane traveling waves underlie impaired hearing in tectb mutant mice. In *AIP Conference Proceedings-American Institute of Physics* (2011), vol. 1403, p. 85.
- [43] GIVELBERG, E., AND BUNN, J. A comprehensive three-dimensional model of the cochlea. *Journal of Computational Physics* 191, 2 (2003), 377–391.
- [44] GOLD, T. Hearing. ii. the physical basis of the action of the cochlea. *Proceedings of the Royal Society of London. Series B-Biological Sciences* 135, 881 (1948), 492–498.
- [45] GRAFF, K. *Wave motion in elastic solids*. Dover Pubns, 1991.
- [46] GREENWOOD, D. D. A cochlear frequency-position function for several species - 29 years later. *Journal of the Acoustical Society of America* 87, 6 (1990), 2592–2605.
- [47] GROVES, A. The challenge of hair cell regeneration. *Experimental Biology and Medicine* 235, 4 (2010), 434–446.
- [48] HAMILTON, T., JIN, C., TAPSON, J., AND VAN SCHAIK, A. A 2-d cochlea with hopf oscillators. In *Biomedical Circuits and Systems Conference, 2007. BIOCAS 2007. IEEE* (2007), pp. 91–94.
- [49] HE, D. Z. Z., JIA, S. P., AND DALLOS, P. Mechanoelectrical transduction of adult outer hair cells studied in a gerbil hemicochlea. *Nature* 429, 6993 (2004), 766–770.
- [50] HELLE, R. *Beobachtungen an hydromechanischen Modellen des Innenohres mit Nachbildung von Basilarmembran, Corti-Organ und Deckmembran*. PhD thesis, 1974.
- [51] HINKE, L., MACE, B., AND BRENNAN, M. Finite element analysis of waveguides. *ISVR Technical Memorandum* 932 (2004), 1–48.

- [52] HOLMES, M., AND COLE, J. Cochlear mechanics : Analysis for a pure tone. *The Journal of the Acoustical Society of America* 76 (1984), 767.
- [53] HOMER, M., CHAMPNEYS, A., HUNT, G., AND COOPER, N. Mathematical modeling of the radial profile of basilar membrane vibrations in the inner ear. *The Journal of the Acoustical Society of America* 116 (2004), 1025.
- [54] HUDSPETH, A. J. Extracellular current flow and the site of transduction by vertebrate hair-cells. *Journal of Neuroscience* 2, 1 (1982), 1–10.
- [55] HUDSPETH, A. J. How the ears works work. *Nature* 341, 6241 (1989), 397–404.
- [56] HUDSPETH, A. J. Making an effort to listen : Mechanical amplification in the ear. *Neuron* 59, 4 (2008), 530–545.
- [57] JOHNSTONE, B., AND BOYLE, A. Basilar membrane vibration examined with the mössbauer technique. *Science* 158, 3799 (1967), 389.
- [58] JOHNSTONE, B., PATUZZI, R., AND YATES, G. Basilar membrane measurements and the travelling wave. *Hearing Research* 22, 1-3 (1986), 147–153.
- [59] KAPURIA, S., STEELE, C., PURIA, S., SHERA, C., AND OLSON, E. Mechanics of the unusual basilar membrane in gerbil. In *AIP Conference Proceedings-American Institute of Physics* (2011), vol. 1403, p. 333.
- [60] KAUFMAN, A. N., AND FRIEDLAND, L. Phase-space solution of the linear mode-conversion problem. *Physics Letters A* 123, 8 (1987), 387–389.
- [61] KEMP, D. Stimulated acoustic emissions from within the human auditory system. *The Journal of the Acoustical Society of America* 64, 5 (1978), 1386–1391.
- [62] KENNEDY, H., CRAWFORD, A., AND FETTIPLACE, R. Force generation by mammalian hair bundles supports a role in cochlear amplification. *Nature* 433, 7028 (2005), 880–883.
- [63] KIM, W., LEE, J., CHOI, H., HUR, S., AND PARK, J. Design of a totally implantable artificial cochlea mimicking the human hearing mechanism. *EKC 2010* (2011), 67–75.
- [64] KNISELY, K., SINGH, V., GROSH, K., DOWLING, D., AND YONAK, S. Ultrasonic calibration of mems (microelectromechanical systems) microphone arrays. *The Journal of the Acoustical Society of America* 127 (2010), 1980.
- [65] KOZLOV, A., BAUMGART, J., RISLER, T., VERSTEEGH, C., AND HUDSPETH, A. Forces between clustered stereocilia minimize friction in the ear on a subnanometre scale. *Nature* 474, 7351 (2011), 376–379.
- [66] KRYLOV, V., AND TILMAN, F. Acoustic 'black holes' for flexural waves as effective vibration dampers. *Journal of Sound and Vibration* 274, 3-5 (2004), 605–619.
- [67] KRYLOV, V., AND WINWARD, R. Experimental investigation of the acoustic black hole effect for flexural waves in tapered plates. *Journal of Sound and Vibration* 300, 1-2 (2007), 43–49.
- [68] KU, E. *Modelling the human cochlea*. PhD thesis, University of Southampton, 2008.
- [69] LAMB, J., AND CHADWICK, R. Dual traveling waves in an inner ear model with two degrees of freedom. *Physical Review Letters* 107, 8 (2011), 88101.
- [70] LAMB, J., CHADWICK, R., SHERA, C., AND OLSON, E. Unraveling traveling waves using wkb modeling. In *AIP Conference Proceedings-American Institute of Physics* (2011), vol. 1403, p. 97.



- [71] LEAL, M., SHIN, Y., LABORDE, M., CALMELS, M., VERGES, S., LUGARDON, S., ANDRIEU, S., DEGUINE, O., AND FRAYSSE, B. Music perception in adult cochlear implant recipients. *Acta oto-laryngologica* 123, 7 (2003), 826–835.
- [72] LECHNER, T. A hydromechanical model of the cochlea with nonlinear feedback using pvf2 bending transducers. *Hearing research* 66, 2 (1993), 202–212.
- [73] LEGAN, P., LUKASHKINA, V., GOODYEAR, R., LUKASHKIN, A., VERHOEVEN, K., VAN CAMP, G., RUSSELL, I., AND RICHARDSON, G. A deafness mutation isolates a second role for the tectorial membrane in hearing. *Nature neuroscience* 8, 8 (2005), 1035–1042.
- [74] LEPAGE, E. Frequency-dependent self-induced bias of the basilar membrane and its potential for controlling sensitivity and tuning in the mammalian cochlea. *The Journal of the Acoustical Society of America* 82 (1987), 139–154.
- [75] LEPINE, C. *Modélisation de la propagation cochléaire par voie osseuse*. PhD thesis, 2009.
- [76] LIBERMAN, M., GUINAN JR, J., ET AL. Feedback control of the auditory periphery : anti-masking effects of middle ear muscles vs. olivocochlear efferents. *Journal of communication disorders* 31, 6 (1998), 471.
- [77] LIGHTHILL, J. Energy-flow in the cochlea. *Journal of Fluid Mechanics* 106, MAY (1981), 149–213.
- [78] LIM, K. *Physical and mathematical cochlear models*. PhD thesis, 2000.
- [79] LIM, K., FITZGERALD, A., STEELE, C., AND PURIA, S. Building a physical cochlea model on a silicon chip. *Developments in Auditory Mechanics*. Teaneck, World Scientific (1999), 223–229.
- [80] LIM, K., AND STEELE, C. A three-dimensional nonlinear active cochlear model analyzed by the wkb-numeric method. *Hearing research* 170, 1-2 (2002), 190–205.
- [81] LINETON, B., SOHAL, R., HARVEY, E., THORNTON, A., SHERA, C., AND OLSON, E. High frequency click-evoked otoacoustic emission measurements using maximum length sequences. In *AIP Conference Proceedings-American Institute of Physics* (2011), vol. 1403, p. 293.
- [82] LITTLEJOHN, R., AND FLYNN, W. General linear mode conversion coefficient in one dimension. *Physical review letters* 70, 12 (1993), 1799–1802.
- [83] LOH, C. Multiple scale analysis of the spirally coiled cochlea. *The Journal of the Acoustical Society of America* 74 (1983), 95.
- [84] MACE, B., DUHAMEL, D., BRENNAN, M., AND HINKE, L. Finite element prediction of wave motion in structural waveguides. *The Journal of the Acoustical Society of America* 117 (2005), 2835.
- [85] MACKAY, R. S. Mode conversion in the cochlea? linear analysis. Tech. Rep. IHES-P-2006-31, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Bures-sur-Yvette, 2006.
- [86] MAESS, M., WAGNER, N., AND GAUL, L. Dispersion curves of fluid filled elastic pipes by standard fe models and eigenpath analysis. *Journal of sound and vibration* 296, 1-2 (2006), 264–276.
- [87] MANOUSSAKI, D., AND CHADWICK, R. S. Effects of geometry on fluid loading in a coiled cochlea. *Journal on Applied Mathematics* 61, 2 (2000), 369–386.
- [88] MANOUSSAKI, D., DIMITRIADIS, E., AND CHADWICK, R. Cochleas graded curvature effect on low frequency waves. *Physical review letters* 96, 8 (2006), 88701.

- [89] MARTIN, P. Active hair-bundle motility of the hair cells of vestibular and auditory organs. *Active Processes and Otoacoustic Emissions in Hearing* (2007), 93–143.
- [90] MARTIN, P., AND HUDSPETH, A. Active hair-bundle movements can amplify a hair cells response to oscillatory mechanical stimuli. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 96, 25 (1999), 14306.
- [91] MEAUD, J., LI, Y., GROSH, K., SHERA, C., AND OLSON, E. The generation of harmonic distortion and distortion products in a computational model of the cochlea. In *AIP Conference Proceedings-American Institute of Physics* (2011), vol. 1403, p. 231.
- [92] MIDDLEBROOKS, J. Narrow-band sound localization related to external ear acoustics. *The Journal of the Acoustical Society of America* 92 (1992), 2607.
- [93] MIDDLEBROOKS, J., AND GREEN, D. Sound localization by human listeners. *Annual review of psychology* 42, 1 (1991), 135–159.
- [94] MIRONOV, M. Propagation of a flexural wave in a plate whose thickness decreases smoothly to zero in a finite interval. *Sov. Phys. Acoust* 34 (1988), 318–319.
- [95] MOORE, B. *Cochlear hearing loss : physiological, psychological and technical issues*. Wiley-Interscience, 2007.
- [96] MOUNTAIN, D. Changes in endolymphatic potential and crossed olivocochlear bundle stimulation alter cochlear mechanics. *Science* 210, 4465 (1980), 71.
- [97] NASHIF, A., JONES, D., AND HENDERSON, J. *Vibration damping*. Wiley-interscience, 1985.
- [98] NAYFEH, A. *Introduction to perturbation techniques*. Wiley-VCH, 2011.
- [99] NEELY, S. *Mathematical models of the mechanics of the cochlea*. PhD thesis, California Institute of Technology, 1978.
- [100] NEELY, S. T., AND KIM, D. O. A model for active elements in cochlear biomechanics. *Journal of the Acoustical Society of America* 79, 5 (1986), 1472–1480.
- [101] O’BOY, D., KRYLOV, V., AND KRALOVIC, V. Damping of flexural vibrations in rectangular plates using the acoustic black hole effect. *Journal of Sound and Vibration* 329, 22 (2010), 4672–4688.
- [102] OFFNER, F., DALLOS, P., AND CHEATHAM, M. Positive endocochlear potential : mechanism of production by marginal cells of stria vascularis. *Hearing research* 29, 2 (1987), 117–124.
- [103] OLSON, E., ET AL. Direct measurement of intra-cochlear pressure waves. *Nature* 402, 6761 (1999), 526–528.
- [104] PARTHASARATHI, A. *Numerical modeling and electro-acoustic stimulus response analysis for cochlear mechanics*. PhD thesis, University of Michigan, 2000.
- [105] PROBST, R., LONSBURY-MARTIN, B., MARTIN, G., ET AL. A review of otoacoustic emissions. *J Acoust Soc Am* 89, 5 (1991), 2027–2067.
- [106] PURIA, S., HARTMAN, B., KIM, J., OGHALAI, J., RICCI, A., LIBERMAN, M., SHERA, C., AND OLSON, E. Three-dimensional imaging of the mouse organ of corti cytoarchitecture for mechanical modeling. In *AIP Conference Proceedings-American Institute of Physics* (2011), vol. 1403, p. 356.
- [107] PURIA, Y., AND STEELE, C. Intracochlear pressure and organ of corti impedance from a linear active three-dimensional model. *ORL Journal for Oto-Rhino-Laryngology and its related specialties* 68 (2006), 365–372.

- [108] RAMAMOORTHY, S., GROSH, K., AND DODSON, J. A theoretical study of structural acoustic silencers for hydraulic systems. *The Journal of the Acoustical Society of America* 111 (2002), 2097.
- [109] RAMAMOORTHY, S., GROSH, K., AND NAWAR, T. Structural acoustic silencers - design and experiment. *The Journal of the Acoustical Society of America* 114 (2003), 2812.
- [110] RAMAMOORTHY, S., NUTTALL, A., SHERA, C., AND OLSON, E. Outer hair cell electromotility in vivo. In *AIP Conference Proceedings-American Institute of Physics* (2011), vol. 1403, p. 176.
- [111] RHODE, W. Observations of the vibration of the basilar membrane in squirrel monkeys using the mössbauer technique. *The Journal of the Acoustical Society of America* 49 (1971), 1218.
- [112] RICHARDSON, G., LUKASHKIN, A., AND RUSSELL, I. The tectorial membrane : one slice of a complex cochlear sandwich. *Current opinion in otolaryngology & head and neck surgery* 16, 5 (2008), 458.
- [113] ROBLES, L., AND RUGGERO, M. A. Mechanics of the mammalian cochlea. *Physiological Reviews* 81, 3 (2001), 1305–1352.
- [114] RUGGERO, M., ROBLES, L., AND RICH, N. Two-tone suppression in the basilar membrane of the cochlea : Mechanical basis of auditory-nerve rate suppression. *Journal of neurophysiology* 68, 4 (1992), 1087–1099.
- [115] RUGGERO, M. A., RICH, N. C., RECIO, A., NARAYAN, S. S., AND ROBLES, L. Basilar-membrane responses to tones at the base of the chinchilla cochlea. *Journal of the Acoustical Society of America* 101, 4 (1997), 2151–2163.
- [116] SELVA, P., MORLIER, J., AND GOURINAT, Y. Development of a dynamic virtual reality model of the inner ear sensory system as a learning and demonstrating tool. *Modelling and Simulation in Engineering 2009* (2009), 5.
- [117] SELVA, P., OMAN, C. M., AND STONE, H. A. Mechanical properties and motion of the cupula of the human semicircular canal. *J Vestib Res* 19, 3-4 (2009), 95–110.
- [118] SHERA, C., AND OLSON, E. What fire is in mine ears : Progress in auditory biomechanics : Proceedings of the 11th international mechanics of hearing workshop. In *American Institute of Physics Conference Series* (2011), vol. 1403.
- [119] SHERA, C., TUBIS, A., AND TALMADGE, C. Do forward-and backward-traveling waves occur within the cochlea ? countering the critique of nobili et al. *JARO-Journal of the Association for Research in Otolaryngology* 5, 4 (2004), 349–359.
- [120] SHERA, C., AND ZWEIG, G. Reflection of retrograde waves within the cochlea and at the stapes. *The Journal of the Acoustical Society of America* 89 (1991), 1290.
- [121] SHINTAKU, H., NAKAGAWA, T., KITAGAWA, D., TANUJAYA, H., KAWANO, S., AND ITO, J. Development of piezoelectric acoustic sensor with frequency selectivity for artificial cochlea. *Sensors and Actuators A : Physical* 158, 2 (2010), 183–192.
- [122] SHINTAKU, H., TATENO, T., TSUCHIOKA, N., TANUJAYA, H., NAKAGAWA, T., ITO, J., AND KAWANO, S. Culturing neurons on mems fabricated p (vdf-trfe) films for implantable artificial cochlea. *Journal of Biomechanical Science and Engineering* 5, 3 (2010), 229–235.
- [123] SNOWDON, J. *Vibration and shock in damped mechanical systems*. Wiley New York, 1968.

- [124] SOTOMAYOR, M., WEIHOFEN, W., GAUDET, R., COREY, D., SHERA, C., AND OLSON, E. Molecular mechanics of tip-link cadherins. In *AIP Conference Proceedings-American Institute of Physics* (2011), vol. 1403, p. 64.
- [125] STEELE, C. Behavior of the basilar membrane with pure-tone excitation. *Journal of the Acoustical Society of America* 55 (1974), 148.
- [126] STEELE, C. Toward three-dimensional analysis of cochlear structure. *ORL Journal for Oto-Rhino-Laryngology and its related specialties* 61, 5 (1999), 238–251.
- [127] STEELE, C., DE MONVEL, J., AND PURIA, S. A multiscale model of the organ of corti. *Journal of mechanics of materials and structures* 4, 4 (2009), 755.
- [128] STEELE, C., AND LIM, K. Cochlear model with three-dimensional fluid, inner sulcus and feed-forward mechanism. *Audiology and Neurotology* 4, 3-4 (1999), 197–203.
- [129] STEELE, C., AND MILLER, C. An improved wkb calculation for a two-dimensional cochlear model. *The Journal of the Acoustical Society of America* 68 (1980), 147.
- [130] STEELE, C., AND TABER, L. Comparison of wkb and finite difference calculations for a two-dimensional cochlear model. *The Journal of the Acoustical Society of America* 65 (1979), 1001.
- [131] STEELE, C., AND TABER, L. Comparison of wkb calculations and experimental results for three-dimensional cochlear models. *The Journal of the Acoustical Society of America* 65 (1979), 1007.
- [132] STEELE, C., AND TABER, L. Three-dimensional model calculations for guinea pig cochlea. *The Journal of the Acoustical Society of America* 69 (1981), 1107.
- [133] STIX, T. Radiation and absorption via mode conversion in an inhomogeneous collision-free plasma. *Physical Review Letters* 15, 23 (1965), 878–882.
- [134] TABER, L., AND STEELE, C. Cochlear model including three-dimensional fluid and four modes of partition flexibility. *The Journal of the Acoustical Society of America* 70 (1981), 426.
- [135] VAN DER SCHAFT, A. Port-hamiltonian systems : network modeling and control of nonlinear physical systems. *Advanced dynamics and control of structures and machines. CISM Courses and Lectures*, 444 (2004), 127–168.
- [136] VAN DER SCHAFT, A., AND MASCHKE, B. The hamiltonian formulation of energy conserving physical systems with external ports. *AEU. Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik* 49, 5-6 (1995), 362–371.
- [137] VON BÉKÉSY, G. Paradoxical direction of wave travel along the cochlear partition. *The Journal of the Acoustical Society of America* 27 (1955), 137.
- [138] VON BÉKÉSY, G. Simplified model to demonstrate the energy flow and formation of traveling waves similar to those found in the cochlea. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 42, 12 (1956), 930–944.
- [139] VON BÉKÉSY, G., AND WEVER, E. *Experiments in hearing*. McGraw-Hill New York, 1960.
- [140] WATTS, L. *Cochlear mechanics : Analysis and analog VLSI*. PhD thesis, California Institute of Technology, 1992.
- [141] WATTS, L. The mode-coupling liouville–green approximation for a two-dimensional cochlear model. *The Journal of the Acoustical Society of America* 108 (2000), 2266.
- [142] WELLS, G., RICCI, A., SHERA, C., AND OLSON, E. Exploring the role of mechanotransduction activation and adaptation kinetics in hair cell filtering using a

- hodgkin-huxley approach. In *AIP Conference Proceedings-American Institute of Physics* (2011), vol. 1403, p. 70.
- [143] WEN, B. *Modeling the nonlinear active cochlea : Mathematics and analog VLSI*. PhD thesis, University of Pennsylvania, 2006.
- [144] WEN, B., AND BOAHEN, K. A silicon cochlea with active coupling. *Biomedical Circuits and Systems, IEEE Transactions on* 3, 6 (2009), 444–455.
- [145] WHITE, R. *Biomimetic trapped fluid microsystems for acoustic sensing*. PhD thesis, University of California, San Diego, 2005.
- [146] WHITE, R., CHENG, L., AND GROSH, K. Microfabrication of coupled fluid-structure systems with applications in acoustic sensing. *Sensors and Actuators A : Physical* 141, 2 (2008), 288–298.
- [147] WHITE, R., AND GROSH, K. Microengineered hydromechanical cochlear model. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 102, 5 (2005), 1296.
- [148] WHITE, R., AND GROSH, K. Fully micromachined lifesize cochlear model. *Auditory Mechanisms : Processes and Models* (2006).
- [149] WHITHAM, G. *Linear and nonlinear waves*, vol. 226. Wiley New York, 1974.
- [150] WO, A., CHEN, C., HSU, Y., AND LIANG, J. Frequency discrimination characteristics of cochlear basilar membrane using a fluid/structure model. *The Chinese Journal of Mechanics* 18, 1 (2002), 1–7.
- [151] XU, J., DAPINO, M., GALLEG0-PEREZ, D., AND HANSFORD, D. Microphone based on polyvinylidene fluoride (pvdf) micro-pillars and patterned electrodes. *Sensors and Actuators A : Physical* 153, 1 (2009), 24–32.
- [152] ZAGADOU, B., MOUNTAIN, D., SHERA, C., AND OLSON, E. Can outer hair cells actively pump fluid into the tunnel of corti? In *AIP Conference Proceedings-American Institute of Physics* (2011), vol. 1403, p. 658.
- [153] ZENG, F. Trends in cochlear implants. *Trends in amplification* 8, 1 (2004), 1–34.
- [154] ZHENG, J., SHEN, W., HE, D., LONG, K., MADISON, L., DALLOS, P., ET AL. Prestin is the motor protein of cochlear outer hair cells. *Nature* 405, 6783 (2000), 149–155.
- [155] ZWISLOCKI, J., AND KLETSKY, E. Tectorial membrane : a possible effect on frequency analysis in the cochlea. *Science* 204, 4393 (1979), 639–641.

